tuse.shahroodut.ac.ir

نشریه‌ی مهندسی تونل و فضاهای زیرزمینی

Tunneling & Underground Space Engineering (TUSE)

دوره‌ی ۴- شماره‌ی ۲/زمستان ۱۳۹۴

تعیین تنش مماسی اطراف تونل‌های مربع شکل با استفاده از توابع پتانسیل مختلط

مهدی زمانی لنجانی[۱]؛ ساناز امجدیان[۲*]؛ رضا خرداد[۳]

۱- استادیار؛ دانشکده‌ی مهندسی عمران، مکانیک سنگ، دانشگاه یاسوج

۲- دانش آموخته‌ی کارشناسی ارشد عمران، خاک و پی، دانشگاه یاسوج

۳- دانشیار؛ دانشکده‌ی علوم پایه، فیزیک، دانشگاه یاسوج

دریافت دست‌نوشته: ۱۳۹۴/۰۳/۰۹؛ پذیرش دست‌نوشته: ۱۳۹۴/۱۲/۲۴

واژگان کلیدی

توابع پتانسیل مختلط

نگاشت همدیس

تنش مماسی

تونل مربع شکل

تئوری الاستیسیته

چکیده

از منظر ریاضی در طبیعت بر هر پدیده‌ای یک معادله دیفرانسیل حاکم است. بر رفتار مکانیکی محیط اطراف فضاهای زیرزمینی نیز یک معادله‌ی دیفرانسیل حاکم است. با حل این معادله، میدان جابجائی‌ها و تنش‌ها در هر یک از نقاط توده سنگ اطراف فضای زیرزمینی محاسبه شده و برای تحلیل پایداری سازه مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مقاله نحوه فرمول بندی و راه حل تحلیلی برای تعیین تنش اطراف تونل مربعی تحت تنش های برجا با استفاده از روش پتانسیل مختلط ارائه شده است. همچنین با استفاده از نگاشت همدیس مقطع تونل مربعی به شکل دایره‌ای تبدیل شد. توده سنگ بصورت الاستیک و ایزوتروپ در نظر گرفته شده است. سپس با افزایش جملات سری نگاشت، به بررسی تغییرات تنش‌های مماسی اطراف تونل پرداخته و نتایج در قالب نمودار نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد با افزایش جملات سری نگاشت، شکل مربع در گوشه‌ها صاف‌تر شده و تنش‌های مماسی در آن‌ها افزایش می‌یابند.

۱- مقدمه

تونل یکی از مهم‌ترین سازه‌های زیرزمینی است که کاربرد گسترده‌ای در حمل ونقل، مسیر انتقال آب و سایر کاربردها دارد. پایداری حفاری‌های زیرزمینی به شکل تونل، اندازه‌ی دهانه، تنش‌های برجا، شرایط خاک و...بستگی دارد. اگرچه شکل دهانه تونل به کاربرد آن بستگی دارد اما طراحی ایمن مستلزم آگاهی از توزیع تنش‌ها و جابجایی‌هایی است که اطراف تونل اتفاق می‌افتد. در حالت کلی درتوده‌های سنگی موجود در اعماق زمین، تنش‌هایی موسوم به تنش‌های برجا وجود دارند که عامل اصلی آن‌ها، وزن طبقات و فعالیت‌های تکتونیکی منطقه است. پس از احداث تونل، وضعیت تنش های موجود در اطراف تونل به هم خورده و آرایش جدیدی پیدا می کنند. تنش‌های مذکور تنش‌های القایی گفته می‌شود و مقادیر آن‌ها با تنش‌های برجا متفاوت‌اند. آگاهی و تعیین وضعیت و مقدار تنش‌های برجا و القایی از جمله ضرورت‌های اصلی طراحی تونل است (*Goodman,1982*).

در بسیاری موارد، ممکن است اندازه تنش‌های القایی از حد مقاومت سنگ تجاوز کند و باعث خرابی سازه شوند. مساله‌ی اغتشاش در وضعیت تنش‌های برجا فقط تا فاصله معینی از شعاع تونل ادامه دارد که این فاصله را شعاع تاثیر تونل گویند و در ماورای آن وضعیت تنش‌ها دست نخورده باقی می‌ماند. باتوجه به این که در تونل‌های مستطیلی تاثیر شکل مقطع تونل و مخصوصا وجود گوشه‌ها در توزیع تنش‌ها و تمرکز آن‌ها نقش مهمی دارد و همچنین بعضی از مقاطع تونل‌های شهری (ایستگاه‌های مترو) الزاما دایره‌ای نیستند لذا بررسی اولیه‌ی تنش‌های اطراف این تونل‌ها ضروری است. بنابراین محاسبه‌ی تنش و تغییر مکان در اطراف تونل از اساسی‌ترین نیازهای طراحی تونل است (*Heidari, et al.,2003*)

* شیراز؛ شهرک استقلال؛ خیابان شهیدان فرصتیان؛ کوچه ۲/۲؛ جنب ساختمان طاها و دیبا؛ کدپستی:۷۱۸۹۷۹۴۱۱۶؛ شماره تلفن: ۰۷۱۵۸۰۰۲۴۵۵؛ آدرس پست الکترونیک: sanaz.amjadian@gmail.com

طراحی تونل‌ها و تحلیل فضاهای زیرزمینی به سه روش انجام می‌پذیرد: روش تجربی، روش عددی، روش تحلیلی. در روش‌های تحلیلی برخلاف روش‌های عددی به جواب‌های بسته‌ای می‌رسیم که روند عمومی تاثیر پارامترها را به ما نشان می‌دهند. در این روش‌ها هرچه خصوصیات مساله به شرایط مفروض نزدیک‌تر باشد، جواب دقیق‌تر است. هر چند در بیشتر روابط تحلیلی نیاز به ساده سازی‌هایی نظیر پذیرفتن رفتار الاستیک خطی سنگ است، اما بعضی از پدیده‌ها تنها توسط روابط تحلیلی با اطمینان بالا تعیین می‌شوند. یکی از روش‌های تحلیلی که در به دست آوردن میدان تنش و جابجایی در محیط الاستیک کاربرد دارد، استفاده از توابع پتانسیل مختلط است. تئوری توابع مختلط ابزاری قوی برای حل بسیاری از مسائل الاستیسیته است. تعداد زیادی از کاربردهای اصلی این روش توسط کولوسو (۱۹۰۹) ارائه شده است. محققین دیگری از جمله موسخیلیشویلی (*Muskhelishvili,1954*) و ساوین (*savin,1961*) کاربرد این تئوری را گسترش دادند.

اکساداکلیوس در سال ۲۰۰۲ نشان داد که توابع مختلط می‌تواند، به صورت موفقیت‌آمیز برای حل مسائل الاستیسته صفحه‌ای برای هر تونل با مقطع عرضی با یک محور تقارن و کشش‌های سطحی استفاده شود (*Exadaktylos & Stavropoulou, 2002*). لی و وانگ در سال ۲۰۰۸ با استفاده از تئوری پتانسیل مختلط در تونل‌های دایره‌ای با آستر تحت تنش‌های برجا و برشی یک حل کرنش صفحه‌ای الاستیک ارائه دادند (*Li & Wang, 2008*). این حل را برای تنش‌های اطراف تونل در یک محیط ایزوتروپ بر طبق بارهای یکنواخت زمین و فشار وسیله نگهداری استفاده کردند. اولین بار فردی به نام اینگیلیس در سال ۱۹۱۳ با استفاده از توابع تنش ایری توانست روابطی برای نقاط مهم روی مرز بیضی به دست آورد (*Inglis,1913*). عالمی در سال ۱۳۹۲ با استفاده از تئوری توابع پتانسیل مختلط به حل تحلیلی تنش اطراف تونل‌های بیضوی تحت میدان برشی پرداخت (*Alami, 2013*)

روش تحلیلی در سال ۲۰۰۶ توسط هو و همکاران برای یک سازه‌ی مستطیلی که تحت موج برشی قرار داشت بر اساس تئوری متغیرهای مختلط و نگاشت همدیس ارائه شد (*Huo, 2006*). آن‌ها تئوری توابع مختلط را برای تعیین تنش و کرنش زمین و تئوری سازه‌ای را برای تنش و کرنش سازه بکار بردند. آن‌ها همچنین از یک آنالیز عددی نیز در کنار آنالیز تحلیلی استفاده کردند. بوبت در سال ۲۰۱۰ روش تحلیلی جدیدی را با استفاده از توابع مختلط برای محاسبه عکس‌العمل نگهداری توده‌سنگ برای تونل‌های دایره‌ای و مستطیلی‌شکل عمیق در شرایط زهکشی شده و زهکشی نشده ارائه داد (*Bobet,2010*). در مدل او تنش برجای اولیه، تنها تنش برشی بود. باتیستا در سال ۲۰۱۱ میدان تنش‌ها و جابجایی‌ها را در اطراف حفرات غیردایروی با استفاده از توابع مختلط موسخیلیشویلی و نگاشت شوارتز-کریستوفل تعیین نمود (*Batista, 2011*). لوگالام و همکاران در سال ۲۰۱۱ صفحه‌ای را با حفره‌ی مستطیلی تحت خمش بررسی کردند (*Louhghalam, et al., 2011*). آن‌ها نشان دادند که چه طور روش نگاشت یک به یک متغیر مختلط در کنار آنالیز عددی المان محدود برای تحلیل تنش گوشه‌ها استفاده می‌شود. جپاریدز در سال ۲۰۱۳ در قالب یک مثال عددی تنش اطراف یک حفره‌ی مربعی را با استفاده از برنامه‌ی کامپیوتری *Matlab* به دست آورد (*Japaridze, 2013*). او سپس نتایج حاصل را با نتایج حاصل از روش عددی المان محدود مقایسه کرد. کارگر و همکاران در سال ۲۰۱۴ راه حل تحلیلی برای تعیین تنش در اطراف مغارهای گازی تحت فشار داخلی ثابت ارائه کردند (*Kargar, et al., 2014a*). در نهایت جواب‌های تحلیلی با مقادیر به دست آمده از نرم افزار اجزا محدود *phase 2* مقایسه شده است. همچنین در یک روش نیمه تحلیلی برای تعیین تنش اطراف تونل های غیر دایروی با پوشش بتنی ارائه دادند. آن‌ها برای هر دو منطقه پوشش بتنی و توده سنگ اطراف آن توابع پتانسیل متفاوتی در نظر گرفتند، به طوری که در سطح تونل و سطح بین تونل و پوشش مربوطه همخوانی بین توابع پتانسیل برای شرایط مرزی وجود دارد (*Kargar, et al., 2014b*). در سال ۲۰۱۵ نیز راه حل تحلیلی با استفاده از توابع پتانسیل مختلط برای تعیین تنش در اطراف تونل‌های دایره‌ای شکل همراه با لاینینگ بتنی توسط کارگر و همکاران ارائه شد (*Kargar, et al., 2015*). نتایج با نرم فزار *abaqus* مقایسه شد. به جز در سقف تونل نتایج همگرایی خوبی داشتند. ناظم و همکاران نیز در سال ۲۰۱۵ دو روش عددی جهت تعیین توابع نگاشت همدیس برای شش مقطع مختلف با شکل های نیم‌دایره‌ای، سهمی

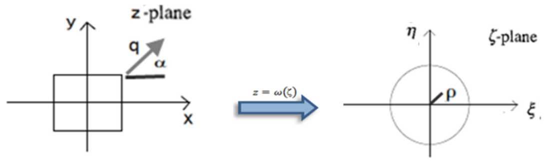
شکل و قوسی ارائه دادند. در توابع آن‌ها تعداد هشت تا ده پارامتر به کار رفته که توسط روش‌های بهینه‌سازی حداقل مربعات خطاها و غیرخطی محاسبه شده‌اند *(Nazem, et al., 2015)*

۲- بیان مساله

مساله مورد بررسی، تعیین تنش در اطراف تونل مربعی شکل است. حل مساله از روش اعداد مختلط فقط برای شکل دایره ممکن است، پس اگر شکل دیگری از مساله وجود داشته باشد، با این شرط که نگاشت مناسب برای تبدیل شکل مورد نظر به دایره در اختیار باشد، مساله قابل حل می‌شود. تمام محیط ‑های نامتناهی با یک سوراخ به شکل دلخواه با نگاشت زیر به بیرون یا داخل دایره‌ی واحد تبدیل می‌شوند:

$$\begin{cases} z = \omega(\zeta) = R(\zeta + \sum_{k=0}^{n} c_k \zeta^{-k}) \quad (|\zeta|^2 > 1) \\ z = \omega(\zeta) = R(\frac{1}{\zeta} + \sum_{k=0}^{n} c_k \zeta^{k}) \quad (|\zeta|^2 \leq 1) \end{cases} \qquad (۱)$$

صفحه‌ای دارای یک حفره‌ی مربعی مطابق شکل ۱ مفروض است. مرکز حفره در مبدا مختصات واقع است. برای محاسبه‌ی توزیع تنش اطراف تونل معادل حفره‌ی مربعی در صفحه z ، $(z = x + iy)$، محیط بیرون مربع می‌تواند به محیط بیرون دایره‌ی واحد در صفحه‌ی مختلط ζ ، $(\zeta = \rho e^{i\theta} = \xi + i\eta)$ نگاشته شود. x و y به ترتیب محورهای افقی و قائم در دستگاه مختصات z و η و ξ محورهای قائم و افقی در دستگاه مختصات ζ هستند *(Timoshenko & Goodier, 1970)*.



شکل۱- نگاشت حفره‌ی مربعی شکل به دایره‌ای به شعاع واحد

این نگاشت توسط ساوین ارائه شده و آن در حالت کلی به صورت معادله‌ی زیر است *(Savin, 1961)*:

$$z = \omega(\zeta) = R\begin{Bmatrix} \zeta + \frac{a+\bar{a}}{2}\frac{1}{\zeta} + \frac{(a-\bar{a})^2}{24}\frac{1}{\zeta^3} \\ + \frac{(a^2-\bar{a}^2)(a-\bar{a})}{80}\frac{1}{\zeta^5} + \cdots \end{Bmatrix} \qquad (۲)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} & a = e^{2k\pi i} \; ; \; \bar{a} = e^{-2k\pi i} \\ & k\pi = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \\ & \lambda = \frac{l}{w} \; , k = 0.25 \left(\frac{l}{w}\right)^{-0.3} \\ & \zeta = \rho e^{i\theta} = \rho(cos\theta + i\, sin\theta) \end{aligned} \qquad (۳)$$

که w عرض تونل مستطیلی و l طول آن است. اگر $k < \frac{1}{4}$ باشد مستطیل افقی خواهد بود به این معنی که ضلع بزرگتر موازی محور x است. اگر $k > \frac{1}{4}$ باشد مستطیل قائم می‌شود یعنی ضلع بزرگتر آن موازی محور y است و اگر $k = \frac{1}{4}$ شد مربع خواهد بود که حالت خاصی از مستطیل است. طبق نظریه کولوسوو و موسخیلیشویلی، توابع پتانسیل $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$ بر حسب مولفه های تنش در مختصات قطبی به صورت زیر بیان می گردد *(Muskhelishvili,1954)*:

$$\begin{aligned} & \sigma_r + \sigma_\theta = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] = 4Re[\,\varphi'(z)] \\ & \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}\,[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \qquad (۴)$$

همچنین با قرار دادن $z = \omega(\zeta)$ در معادلات (۴) معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \sigma_\rho + \sigma_\theta = 2\left[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}\right] = 4\,Re[\Phi(\zeta)] \\ & \sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2}\frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}} \\ & \left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta)\right] \end{aligned} \qquad (۵)$$

که در معادلات (۵):

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad , \quad \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

روی سطح تونل $\rho = 1$ وهمچنین $\sigma_\rho =$ و $\tau_{\rho\theta} = 0$

0، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\sigma_\theta = 4\,Re[\Phi(\zeta)] \tag{۶}$$

که در اینجا σ_θ، σ_ρ و $\tau_{\rho\theta}$ به ترتیب مولفه‌های مماسی، شعاعی و برشی تنش در صفحه‌ی ζ می‌باشند. شکل کلی توابع مختلط $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$ به صورت معادلات(۷) است:

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = -\dfrac{X+iY}{2\pi(1+x)}\ln\zeta + \\ R(B_1+iC_1)\zeta + \varphi_0(\zeta) \\ \psi(\zeta) = \dfrac{x(X-iY)}{2\pi(1+x)}\ln\zeta + \\ R(B'+iC')\zeta + \psi_0(\zeta) \end{cases} \tag{۷}$$

که در آن $\varphi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\zeta^{-n}$ و $\psi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\zeta^{-n}$ و XوY نیروهای خارجی هستند. برای به دست آوردن $\varphi_0(\zeta)$ و $\psi_0(\zeta)$ از روابط(۹) که توسط موسخیلیشویلی (*Muskhelishvili,1954*) و ساوین (*savin,1961*) ارائه شد استفاده می‌شود $(|\zeta|^2 > 1)$:

$$\begin{cases} \varphi_0(\zeta) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\dfrac{\overline{\varphi'_0(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma = \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{f_0}{\sigma-\zeta}d\sigma \\ \psi_0(\zeta) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\dfrac{\varphi'_0(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma = \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{\overline{f_0}}{\sigma-\zeta}d\sigma \end{cases} \tag{۸}$$

تابع f_0، به عنوان تابع مرزی تنش معرفی و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} f_0 = i\int(\overline{X}+i\overline{Y})ds - \frac{X+iY}{2\pi}\ln\sigma - \\ \frac{1+\upsilon}{8\pi}(X-iY)\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\sigma - 2B_1\omega(\sigma) - \\ (B'_1 - iC'_1)\overline{\omega(\sigma)} \end{aligned} \tag{۹}$$

$\overline{f_0}$ نیز مزدوج تابع f_0 است.

۳- تحلیل تنش اطراف تونل مربعی

با توجه به این که مربع حالت خاصی از مستطیل است ($\lambda = 1$)، برای یافتن تابع نگاشت از معادله‌ی (۲) استفاده کرده و مقدار k برابر $\frac{1}{4}$ در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\omega(\zeta) = R(\zeta - \frac{1}{6\zeta^3} + \frac{1}{56\zeta^7} + \frac{1}{176\zeta^{11}} + \cdots) \tag{۱۰}$$

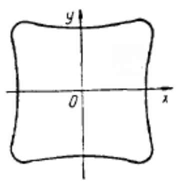
در ساده‌ترین حالت می‌توان دو جمله‌ی اول این سری را در نظر گرفت:

$$\omega(\zeta) = R\left(\zeta - \frac{1}{6\zeta^3}\right) \tag{۱۱}$$

با جایگذاری $\rho e^{i\theta}$ به جای ζ و $\rho = 1$ و جدا کردن قسمت حقیقی و موهومی آن به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} x &= R\left(cos\theta - \frac{1}{6}cos3\theta\right) \\ y &= R\left(sin\theta + \frac{1}{6}sin3\theta\right) \end{aligned} \tag{۱۲}$$

با رسم معادلات (۱۲) در مختصات کارتزین شکل تونل مطابق شکل ۲ قابل رسم است.



شکل۲- نمایی از تونل مربعی تحت نگاشت دو جمله‌ای

با توجه به این که R از رابطه‌ی(۳) به دست می‌آید، با قرار دادن $\lambda = 1$ در این رابطه می‌توان نوشت: $R = \frac{3}{5}w$ که w اندازه‌ی ضلع تونل مربعی می‌باشد. شعاع انحنای گوشه‌های تونل از رابطه‌ی (۱۳) به دست می‌آید (*Savin, 1961*):

$$r_{\theta=45} = \frac{1}{10}R = \frac{3}{50}w = 0.06w \tag{۱۳}$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۱) می‌توان روابط (۱۴) را نوشت:

$$\begin{aligned} \omega'(\zeta) &= R\left(1 + \frac{1}{2\zeta^4}\right) \\ \overline{\omega'(\zeta)} &= R\left(1 + \frac{1}{2}\zeta^4\right) \\ \overline{\omega(\zeta)} &= R\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6}\zeta^3\right) \end{aligned} \tag{۱۴}$$

در کشش یا فشار تک محوره ($N_1 = p$ و

$N_2 = N_3 = 0$) که N_1 همان تنش افقی و N_2 تنش قائم و N_3 تنش برشی هستند. با توجه به معادله‌ی (۷) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} B_1 = \frac{1}{4}(N_1 + N_2) = \frac{p}{4} \\ B'_1 + iC'_1 = \frac{1}{2}(N_2 - N_1 + 2i\, N_3)e^{-2i\alpha} \\ = -\frac{p}{2}e^{-2i\alpha} \end{cases} \quad (۱۵)$$

بدون حضور نیروهای خارجی روابط (۷) به شکل معادلات (۱۶) درمی‌آیند:

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = \frac{p}{4}[\omega(\zeta)] + \varphi_0(\zeta) \\ \psi(\zeta) = -\frac{p}{2}e^{-2i\alpha}[\omega(\zeta)] + \psi_0(\zeta) \end{cases} \quad (۱۶)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۱۱) در معادلات (۱۶) می‌توان نوشت:

$$\varphi(\zeta) = \frac{pR}{4}\left(\zeta - \frac{1}{6\,\zeta^3}\right) + \varphi_0(\zeta)$$
$$\psi(\zeta) = -\frac{pR}{2}\left(\zeta - \frac{1}{6\,\zeta^3}\right)e^{-2i\alpha} + \psi_0(\zeta) \quad (۱۷)$$

با جایگذاری معادلات (۱۱) و (۱۵) در معادله‌ی (۹) بر حسب شرایط مرزی معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} f_0 = -\frac{pR}{2}\left[\begin{matrix} \left(\sigma - \frac{1}{6\,\sigma^3}\right) - \\ e^{+2i\alpha}\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{6}\sigma^3\right) \end{matrix}\right] \\ \overline{f_0} = -\frac{pR}{2}\left[\begin{matrix} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{6}\sigma^3\right) - \\ e^{-2i\alpha}\left(\sigma - \frac{1}{6\,\sigma^3}\right) \end{matrix}\right] \end{cases} \quad (۱۸)$$

به کمک معادلات (۱۴) و در شرایط مرزی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\overline{\omega'(\sigma)}}} = \frac{-1}{6\sigma^3} + \frac{13\sigma}{6(\sigma^4 + 2)} \\ \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} = \frac{-1}{6}\sigma^3 + \frac{13\sigma^3}{12\left(\sigma^4 + \frac{1}{2}\right)} \end{cases} \quad (۱۹)$$

با رجوع به اولین معادله‌ی ۸ می‌توان برای سمت چپ آن نوشت:

$$\alpha_0 + \alpha_1\frac{1}{\zeta} + \alpha_2\frac{1}{\zeta^2} + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{-1}{6\sigma^3} + \frac{13\sigma}{6(\sigma^4 + 2)}\right)\left(-\overline{\alpha_1}\zeta^2 - 2\overline{\alpha_2}\zeta^3 - 3\overline{\alpha_3}\zeta^4 + \cdots\right)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = (\alpha_0 + \alpha_1\frac{1}{\zeta} + \alpha_2\frac{1}{\zeta^2} + \cdots + \frac{\overline{\alpha_1}}{6\zeta} + \frac{2\overline{\alpha_2}}{6} + 0 + \cdots) \quad (۲۰)$$

و سمت راست آن:

$$= \frac{1}{2\pi i}\int -\frac{pR}{2}[\left(\sigma - \frac{1}{6\,\sigma^3}\right) - e^{+2i\alpha}\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{6}\sigma^3\right)]\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{pR}{2}\left[\frac{-1}{6\zeta^3} - \frac{e^{+2i\alpha}}{\zeta}\right] = \frac{pR}{12}\left[\frac{1}{\zeta^3} + \frac{6e^{+2i\alpha}}{\zeta}\right] \quad (۲۱)$$

با برقراری تساوی بین چپ و راست معادله ضرایب α_0، α_1، α_2 و α_3 طبق معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\alpha_0 = 0\,, \alpha_1 = pR\left(\frac{3}{7}cos2\alpha + i\frac{3}{5}sin2\alpha\right)$$
$$\alpha_2 = 0, \alpha_3 = \frac{pR}{12} \quad (۲۲)$$

با جایگذاری این مقادیر درفرمول $\varphi_0(\zeta)$، به دست می‌آید:

$$\varphi_0(\zeta) = pR[\left(\frac{3}{7}cos2\alpha + i\frac{3}{5}sin2\alpha\right)\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{12}\frac{1}{\zeta^3}] \quad (۲۳)$$

می‌توان برای ساده‌سازی عبارت، $\frac{3}{7}cos2\alpha + i\frac{3}{5}sin2\alpha$ را برابر a_1 در نظر گرفت که در این حالت مشتق معادله‌ی ۲۳ عبارتند از:

$$\varphi'_0(\zeta) = pR\left[-\frac{a_1}{\zeta^2} - \frac{1}{4\zeta^4}\right] \quad (۲۴)$$

با رجوع به دومین معادله‌ی ۸ می‌توان برای سمت چپ آن نوشت:

$$\beta_0 + \beta_1\frac{1}{\zeta} + \beta_2\frac{1}{\zeta^2} + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma (\frac{-\sigma^3}{6} + \frac{13\sigma^3}{12(\sigma^4 + \frac{1}{2})})pR\left(-\frac{a_1}{\sigma^2} - \frac{1}{4\sigma^4}\right)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} =$$

$$= \Big(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{\zeta} + \beta_2 \frac{1}{\zeta^2} + \cdots +$$

$$R\left[\frac{-\zeta}{6} + \frac{13\zeta}{12\left(\zeta^4 + \frac{1}{2}\right)}\right]\zeta^2\left(-\frac{a_1}{\zeta^2} - \frac{1}{4\zeta^4}\right)$$

$$= \Big(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{\zeta} + \beta_2 \frac{1}{\zeta^2} + \cdots$$

$$+pR\left[\frac{1}{24\zeta} - a_0 a_1 - \frac{a_0}{4\zeta^2}\right]\Big) \qquad (۲۵)$$

و سمت راست آن:

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma -\frac{pR}{2}\left[\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{6}\sigma^3\right) - e^{-2i\alpha}\left(\sigma - \frac{1}{6\,\sigma^3}\right)\right]\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{pR}{2}\left[\frac{1}{\zeta} + \frac{e^{-2i\alpha}}{6\,\zeta^3}\right] \qquad (۲۶)$$

که در آن:

$$a_0 = \frac{13\zeta}{12\left(\zeta^4 + \frac{1}{2}\right)}$$

$$a_1 = \frac{3}{7}cos2\alpha + i\frac{3}{5}sin2\alpha \qquad (۲۷)$$

با برقراری تساوی بین چپ و راست دومین معادله‌ی ۸

$$\beta_0 = pR(a_0 a_1), \quad \beta_1 = -\frac{13}{24}pR$$

$$\beta_2 = \frac{pR}{4}a_0, \quad \beta_3 = -\frac{pR}{12}e^{-2i\alpha} \qquad (۲۸)$$

با جایگذاری این مقادیر درفرمول $\psi_0(\zeta)$، به دست می‌آید:

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{pR}{12}\left[e^{-2i\alpha}\frac{1}{\zeta^3} + \frac{-26a_1\zeta + 13\zeta^3}{1 + 2\zeta^4}\right] \qquad (۲۹)$$

حال با به دست آمدن $\varphi_0(\zeta)$ و $\psi_0(\zeta)$ و جایگذاری این مقادیر در معادلات (۱۷) می‌توان دو تابع $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$ را به دست آورد:

$$\varphi(\zeta) = pR\left[\frac{1}{4}\zeta + \left(\frac{3}{7}cos2\alpha + i\frac{3}{5}sin2\alpha\right)\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{24}\frac{1}{\zeta^3}\right]$$

$$\psi(\zeta) = -pR\left[\frac{1}{2}e^{-2i\alpha}\zeta + \frac{13\zeta^3 - 26\left(\frac{3}{7}cos2\alpha + i\frac{3}{5}sin2\alpha\right)\zeta}{12\left(1 + 2\zeta^4\right)}\right] \qquad (۳۰)$$

۳-۱- تنش مماسی اطراف تونل مربعی در حالت نگاشت دو جمله ای

برای شرایط تنش تک محوره ی افقی($\alpha = 0$) و با توجه به تابع نگاشت $\omega(\zeta) = R\left(\zeta - \frac{1}{6\,\zeta^3}\right)$ معادلات (۳۰) به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\varphi(\zeta) = pR\left[\frac{1}{4}\zeta + \frac{3}{7}\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{24}\frac{1}{\zeta^3}\right]$$

$$\psi(\zeta) = -pR\left[\frac{1}{2}\zeta + \frac{\frac{91}{\zeta} - \frac{78}{\zeta^3}}{84\left(\frac{1}{\zeta^4} + 2\right)}\right] \qquad (۳۱)$$

با جایگذاری توابع پتانسیل به دست آمده و تابع نگاشت مربوط به آن می‌توان تنش مماسی اطراف تونل در حالت $\sigma_x = p$ $(\alpha = 0)$ و $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ را به دست آورد:

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \frac{p\left[\frac{\zeta^4}{4} - \frac{3}{7}\zeta^2 - \frac{1}{8}\right]}{\left[\zeta^4 + \frac{1}{2}\right]} \qquad (۳۲)$$

$$\sigma_\theta = 4\,Re\left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right] = p\left[\frac{3 - \frac{72}{7}cos2\theta}{5 + 4cos4\theta}\right] \qquad (۳۳)$$

و در حالت $\sigma_y = p$ $(\alpha = 90)$ و $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$:

$$\sigma_\theta = 4\,Re\left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right] = p\left[\frac{3 + \frac{72}{7}cos2\theta}{5 + 4cos4\theta}\right] \qquad (۳۴)$$

۳-۲- تنش مماسی اطراف تونل مربعی در حالت نگاشت سه جمله‌ای

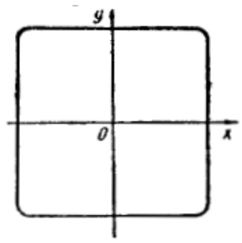
در این حالت برای دستیابی به دقت بالاتر، سه جمله از نگاشت در نظر گرفته می‌شود:

$$\omega(\zeta) = R\left(\zeta - \frac{1}{6\,\zeta^3} + \frac{1}{56\,\zeta^7}\right) \qquad (۳۵)$$

شعاع انحنای گوشه‌های تونل در این حالت برابر است با:

$$r_{\theta=45} = \frac{4}{100}R = 0.0245w \qquad (۳۶)$$

که در مقایسه با حالت قبل کاهش یافته است. این کاهش زاویه همان طور که در شکل ۳ نشان داده شده، محسوس است.



شکل۳- نمایی از تونل مربعی تحت نگاشت سه جمله‌ای

دو تابع پتانسیل مختلط برای حالت تنش افقی برجای تک محوره به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\varphi(\zeta) = pR\left[0.25\zeta + 0.426\frac{1}{\zeta} + .046\frac{1}{\zeta^3} + 0.008\frac{1}{\zeta^5} - 0.004\frac{1}{\zeta^7}\right] \qquad (۳۷)$$

$$\psi(\zeta) = -pR\left[0.5\zeta + \frac{0.548\frac{1}{\zeta} - 0.457\frac{1}{\zeta^3} - 0.026\frac{1}{\zeta^5} - 0.029\frac{1}{\zeta^7}}{1 + 0.5\frac{1}{\zeta^4} - 0.125\frac{1}{\zeta^8}}\right]$$

که می‌توان نوشت:

$$\Phi(\zeta) = p\left[\frac{0.25\zeta^8 - 0.426\zeta^6 - 0.138\zeta^4}{\left[\zeta^8 + \frac{1}{2}\zeta^4 - \frac{1}{8}\right]} + \frac{-0.04\zeta^2 + 0.028]}{\left[\zeta^8 + \frac{1}{2}\zeta^4 - \frac{1}{8}\right]}\right] \qquad (۳۸)$$

و در نتیجه:

$$\sigma_\theta = \frac{-0.654\ cos2\theta + 0.0182\ cos4\theta}{\frac{81}{256} - \frac{1}{16}cos8\theta + \frac{7}{32}cos4\theta} + \frac{+0.0132\ cos6\theta - 0.0032\ cos8\theta + 0.1775}{\frac{81}{256} - \frac{1}{16}cos8\theta + \frac{7}{32}cos4\theta} \qquad (۳۹)$$

دو تابع پتانسیل مختلط برای حالت تنش قائم برجای تک محوره به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\varphi(\zeta) = pR\left[0.25\zeta - 0.426\frac{1}{\zeta} + 0.046\frac{1}{\zeta^3} - 0.008\frac{1}{\zeta^5} - 0.004\frac{1}{\zeta^7}\right] \qquad (۴۰)$$

$$\psi(\zeta) = -pR\left[-0.5\zeta + \frac{0.548\frac{1}{\zeta} + 0.457\frac{1}{\zeta^3} - 0.026\frac{1}{\zeta^5} + 0.029\frac{1}{\zeta^7}}{1 + 0.5\frac{1}{\zeta^4} - 0.125\frac{1}{\zeta^8}}\right]$$

و نهایتا تنش مماسی در این حالت به شکل معادله‌ی (۴۱) نوشته می‌شود:

$$\sigma_\theta = \frac{0.654\ cos2\theta + 0.0182\ cos4\theta}{\frac{81}{256} - \frac{1}{16}cos8\theta + \frac{7}{32}cos4\theta} + \frac{-0.0132\ cos6\theta - 0.0032\ cos8\theta + 0.1775}{\frac{81}{256} - \frac{1}{16}cos8\theta + \frac{7}{32}cos4\theta} \qquad (۴۱)$$

۳-۳- تنش مماسی اطراف تونل مربعی در حالت نگاشت چهار جمله ای

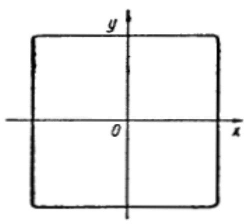
نگاشت زیر چهار جمله از نگاشت کلی مربع را در بردارد:

$$\omega(\zeta) = R\left(\zeta - \frac{1}{6\zeta^3} + \frac{1}{56\zeta^7} + \frac{1}{176\zeta^{11}}\right) \qquad (۴۲)$$

در این حالت شعاع انحنای گوشه‌های تونل برابر است با:

$$r_{\theta=45} = \frac{7}{300}R = 0.014w \qquad (۴۳)$$

که در مقایسه با دو حالت قبل کاهش چشمگیری داشته است و در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل۴- نمایی از تونل مربعی تحت نگاشت چهار جمله‌ای

دو تابع پتانسیل $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$ برای شرایط مرزی $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ و $\sigma_y = p$ به شکل زیر در می‌آیند:

$$\varphi(\zeta) = pR\left[0.25\zeta - 0.425\frac{1}{\zeta} + 0.0476\frac{1}{\zeta^3} - 0.0086\frac{1}{\zeta^5} - 0.006\frac{1}{\zeta^7} + 0.0024\frac{1}{\zeta^9} + 0.0014\frac{1}{\zeta^{11}}\right] \qquad (۴۴)$$

$$\psi(\zeta) = pR\left[0.5\zeta - \frac{0.479\frac{1}{\zeta} - 0.457\frac{1}{\zeta^3} + 0.269\frac{1}{\zeta^5} -}{1 + 0.5\frac{1}{\zeta^4} - 0.125\frac{1}{\zeta^8} + 0.063\frac{1}{\zeta^{12}}}\right.$$

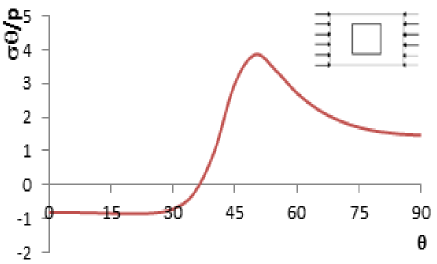
$$\frac{0.037\frac{1}{\zeta^7}-0.073\frac{1}{\zeta^9}+0.017\frac{1}{\zeta^{11}}+0.031\frac{1}{\zeta^{13}}}{1+0.5\frac{1}{\zeta^4}-0.125\frac{1}{\zeta^8}+0.063\frac{1}{\zeta^{12}}}$$

۴-تحلیل روابط

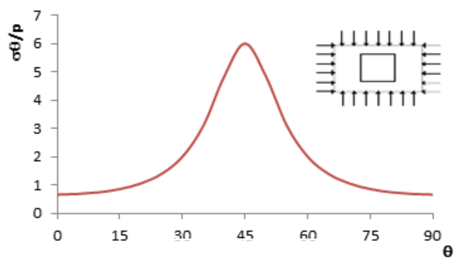
با استفاده از معادلات به دست آمده در بخش قبل می - توان مقادیر تنش مماسی در دو حالت تنش برجای تک محوره‌ی افقی و هیدرواستاتیک از نگاشت دو جمله‌ای، سه جمله‌ای و چهارجمله‌ای را به دست آورد که به ترتیب در جدول ۱، جدول ۲ و جدول ۳ آورده شده است. تنش مماسی در فواصل بین θ=۰ و θ=۹۰ در حالت های الف) تنش برجای تک محوره‌ی افقی ب) تنش برجای هیدرواستاتیک، در نگاشت دو جمله‌ای، سه جمله‌ای و چهارجمله‌ای به ترتیب در شکل‌های ۵ ، ۶ و ۷ نشان داده شده است.

جدول۱- تنش های مماسی تحت تنش برجای تک محوره‌ی افقی، تنش برجای هیدرواستاتیک در نگاشت دو جمله‌ای

ζ-plane θ	z-plane α	σ_θ/p تنش تک محوره افقی	σ_θ/p تنش هیدرواستاتیک
0	0.00	-0.8095	0.6605
5	-1.64	-0.8139	0.6861
10	-3.08	-0.8265	0.7435
15	-4.11	-0.8439	0.8561
20	-4.37	-0.8568	1.0532
25	-3.33	-0.8388	1.3936
30	0.00	-0.7142	2.0
35	7.48	-0.2675	3.0925
40	22.12	0.9779	4.8338
45	45.00	3.0	6.0
50	67.88	3.8559	4.8338
55	82.52	3.367	3.0995
60	90.00	2.7142	2.0
65	93.33	2.2324	1.3937
70	94.37	1.91	1.0532
75	94.11	1.7	0.8561
80	93.08	1.57	0.7435
85	91.64	1.499	0.6861
90	90.00	1.47	0.6605



(الف)

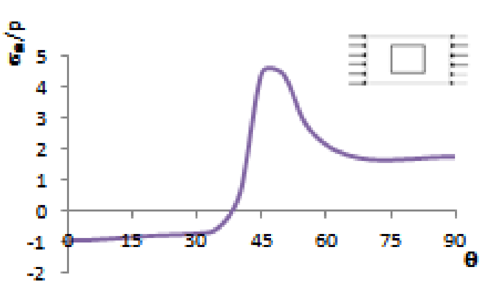


(ب)

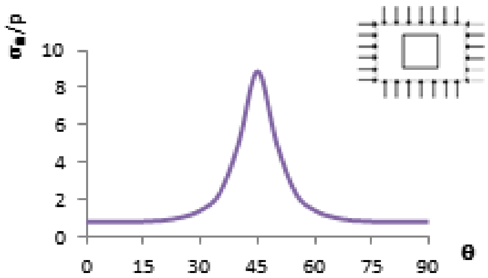
شکل۵- تنش مماسی در فواصل بین θ=۰ و θ=۹۰ در حالت های الف)تنش برجای تک محوره‌ی افقی ب)تنش برجای هیدرواستاتیک(در نگاشت دو جمله)

جدول۲- تنش های مماسی تحت تنش برجای تک محوره‌ی افقی، تنش برجای هیدرواستاتیک در نگاشت سه جمله‌ای

ζ-plane θ	z-plane α	$\sigma\theta/p$ تنش تک محوره افقی	$\sigma\theta/p$ تنش هیدرواستاتیک
0	0.000	-0.948	0.814
5	1.225	-0.929	0.81
10	1.712	-0.8814	0.8066
15	1.102	-0.8273	0.8237
20	-0.474	-0.784	0.889
25	-2.441	-0.7547	1.0523
30	-3.670	-0.7144	1.4269
35	-1.749	-0.5232	2.3318
40	9.945	0.5982	5.0132
45	45.000	4.437	8.874
50	80.055	4.415	5.0132
55	91.749	2.855	2.3318
60	93.670	2.1413	1.4269
65	92.441	1.807	1.0523
70	90.474	1.673	0.889
75	88.898	1.651	0.8237
80	88.288	1.688	0.8066
85	88.775	1.739	0.81
90	90.000	1.762	0.814



(الف)

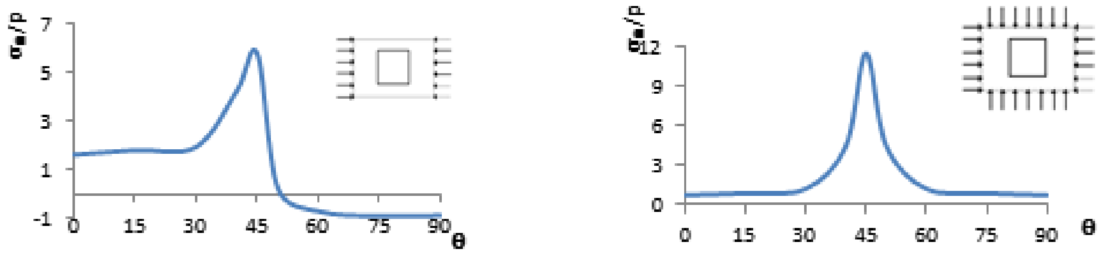


(ب)

شکل۶- تنش مماسی در فواصل بین θ=۰ و θ=۹۰ در حالت های الف)تنش برجای تک محوره‌ی افقی. ب)تنش برجای هیدرواستاتیک(در نگاشت سه جمله)

جدول۳- تنش های مماسی برجای تک محوره‌ی افقی، هیدرواستاتیک در نگاشت چهار جمله‌ای

ζ-plane θ	z-plane α	σ_θ/p تنش تک محوره افقی	σ_θ/p تنش هیدرواستاتیک
0	0	1.616	0.745
15	1.71	1.802	0.901
30	-5.82	1.932	1.23
40	17.04	4.23	4.495
45	45.0	5.763	11.526
50	72.96	0.265	4.495
60	95.82	-0.702	1.23
75	88.29	-0.901	0.901
90	90.0	-0.871	0.745



(ب) (الف)

شکل۷- تنش‌های مماسی در فواصل بین θ=۰ و θ=۹۰ در حالت های الف)تنش برجای تک محوره‌ی افقی. ب)تنش برجای هیدرواستاتیک(در نگاشت چهار جمله)

۵- نتیجه گیری

در این مقاله میدان تنش مماسی در ناحیه‌ی مرز تونل مربعی شکل بر اساس توابع پتانسیل موسخلیشویلی و در سه حالت نگاشت دو جمله‌ای، سه جمله‌ای و چهار جمله‌ای و همچنین در شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفت. توده سنگ به صورت محیطی بارفتار الاستیک خطی و ایزوتروپ فرض شده است.

با نگاهی کلی به نمودارها می‌توان دید که تمرکز تنش در دو نمودار شماره‌ی ۵ در گوشه‌ها بیشترین مقدار خود را داراست. در حالت تنش تک محوره‌ی افقی، تمرکز تنش روی دیواره‌ی تونل منفی است (تقریبا تا ۳۸ درجه) و باعث ایجاد کشش و نهایتا ترک در این ناحیه می‌شود که مستلزم استفاده از نگهدارنده‌های بیشتری برای تونل است و پس از آن تمرکز تنش به شکل مثبت تا ناحیه‌ی ۵۰ درجه ادامه پیدا کرده و در این ناحیه به حداکثر خود می‌رسد (۳٫۹) و بعد از آن روند کاهشی داشته تا اینکه در سقف تونل (ناحیه‌ی ۹۰ درجه) تمرکز تنش به مقدار ۱٫۵ می‌رسد. در حالت تنش دو محوره، ناحیه‌ی کششی‌ای در دیواره و یا سقف تونل دیده نمی‌شود اما تمرکز تنش در گوشه‌ها به ۶ رسیده و افزایش چشمگیری داشته و حالت بحرانی‌تری نیز به دنبال خواهد داشت.

با دقت در دو نمودار های ۶ و۷ می‌توان دریافت که روند تغییرات تنش مانند تغییرات آن در بخش قبل است(نگاشت دو جمله ای). با این تفاوت که در نگاشت سه جمله نسبت به دوجمله‌ای و چهارجمله ای نسبت به سه جمله‌ای مقدار تمرکز تنش مقادیر بیشتری را به خود اختصاص داده است. همانطور که مشاهده می‌شود تمرکز تنش مماسی ماکزیمم در حالت تک محوره‌ی افقی برای نگاشت دو جمله ۳٫۸۵ ، برای نگاشت سه جمله‌ای ۴٫۴۳ و برای نگاشت چهارجمله‌ای به مقدار ۵/۷۶ رسیده است. به این معنی که با کوچک شدن زاویه‌ی انحنای گوشه‌های تونل و تیزگوشه‌تر شدن آن، تمرکز تنش اطراف تونل افزایش می‌یابد. همچنین تنش تک محوره‌ی افقی باعث ایجاد کشش (مقادیر منفی) در دیواره‌ی تونل و تنش تک محوره‌ی قائم باعث ایجاد کشش در سقف تونل می‌شود.

اگرچه روش‌های عددی دارای قابلیت فراوان در حل بسیاری از مسائل مهندسی هستند اما روش تحلیلی توابع پتانسل مختلط روشی موثر و دقیق در حل مسائل الاستیسیته است.

۶- منبع‌ها

Alami, M., (1392). The Analysis of Stress around Elliptical Tunnel due to the Tangential in-situ Stress, by the Complex Potential Functions, M. Sc. Dissertation, Civil Engineering Department, Yasouj

University.

Batista, M. (2011). On the stress concentration around a hole in an infinite plate subject to a uniform load at infinity. International Journal of Mechanical Sciences, 53(4), 254-261.

Bobet, A. (2010). Drained and undrained response of deep tunnels subjected to far-field shear loading. Tunneling and Underground Space Technology, 25(1), 21-31.

Exadaktylos, G. E. & Stavropoulou M.C. (2002). A closed-form solution for stresses and displacement around tunnels, Int. J. Rock Min. Sci., Vol. 39, pp. 905-916.

Goodman, R. E. (1982). Introduction to Rock mechanics. Second Edition, John Wiley, India Edition.

Heidari, M., Vafaeian M., & Shariatmadari, N. (2003). The Effect of ground slope, External force and Tunnel Shape on Ground Settlement due to Tunneling in Soil, 6th Conference in Tunneling, Science and Technical University, Tehran.

Huo, H. B., Obert, A., & Fernandez, G. (2006). Analytical solution for deep rectangular. structure subjected to far-field shear stresses, Tun. Undergr. Spce Tech., Vol. 21, pp. 613-625.

Inglis, CE. (1913). Stress in Plate due to the presence of cracks and sharp corners, Trans Inst. Nov, Archss, 55, pp. 219-230.

Japaridze, L. (2013). Comparison of Analytical and numerical Methods for Assessment of stress-strain state of the Massif around the tunnel of noncircular cross-section, Bulletin of the Georgian academy of science, Vol. 7, No. 1.

Kargar, A., Rahmannejad, R., & Hajabbasi, M. (2014a). Determining the stress around Gaseous Underground Opening using the Complex Potential Functions, Tunneling and Underground Structure Engineering Journal, 3(2), Shahrood University.

Kargar, A., Rahmannejad, R., & Hajabbasi, M. (2014b). A semi-analytical elastic solution for stress field of lined non-circular tunnels at great depth using complex variable method, International Journal of Solids and Structures, Vol. 51, pp. 1475–1482.

Kargar, A., Rahmannejad, R., & Hajabbasi, M. (2015). Determining the Stress around Lining Circular Tunnel using complex Potential Functions, Modares Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, 1(15), pp. 267-276.

Li, Shu-cai & Wang, Ming-bin (2008). Elastic analysis of stress-displacement field for a lined circular tunnel at great depth due to ground loads and internal pressure, Tunn. Undergr. Spce Tech.; Vol. 23, pp. 609-617.

Louhghalam, A., Igusa, T., & Park, C. (2011). Analysis of stress concentrations in plates with rectangular openings by combined conformal mapping– finite element approach, International journal of solids and structures, Vol. 48, pp. 1991-2004.

Muskhelishvili, N. I. (1954). Some Basic Problems of the Mathematical theory of elasticity.

Nazem, A., Hossaini, F., & Mohammadi, A. (2015). Optimization of Conformal Mapping Functions used in Developing Closed-Form Solutions for Underground Structures with Conventional cross Sections, Int. J. Min. & Geo-Eng., Vol.49, No.1, pp.93-102.

Savin, G. N. (1961). Stress concentration around holes, International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics. Pergamon Press.

Timoshenko S. P., & Goodier T. N. (1970). Theory of elasticity, 3rd ed., McGraw–Hill, New York.