

توزیع تنش اطراف تونل‌های نیم‌دایره‌ای به روش تحلیلی (توابع مختلط) و مقایسه با نتایج تحلیل عددی

پژوهشی

مهدی زمانی لنجانی^{۱*}؛ سید محمد صادق آل محمد^۲؛ مسعود رابطی مقدم^۳

۱- استادیار؛ دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی عمران، دانشگاه یاسوج، mahdi@yu.ac.ir

۲- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد؛ دانشکده فنی و مهندسی، مهندسی عمران، گرایش ژئوتکنیک، دانشگاه یاسوج، alemohammad.m.313@gmail.com

۳- استادیار؛ دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی عمران، دانشگاه یاسوج، rabeti@yu.ac.ir

دریافت دست‌نوشته: ۱۴۰۱/۰۵/۲۱؛ پذیرش دست‌نوشته: ۱۴۰۱/۰۹/۰۵

شماره صفحات: ۸۹ تا ۱۱۰

شناسه دیجیتال (DOI): 10.22044/TUSE.2022.12159.1461

چکیده	واژگان کلیدی
مهم‌ترین عامل در طراحی تونل تأمین پایداری آن است. در بسیاری از زمین‌ها تونل‌های حفر شده نمی‌توانند خودنگهدار باشند و برای پابرجا نگاه‌داشتن آن‌ها باید از حایل‌هایی استفاده کرد. همچنین، قرارگیری تونل در میان مصالح طبیعی باعث شده است که شرایط زمین‌شناسی نقش اصلی را در پایداری ایفا نماید. بنابراین برای تأمین پایداری تونل باید به بررسی وضعیت تنش‌های اطراف تونل پرداخته شود. در این پژوهش با استفاده از توابع پتانسیل مختلط و نگاشت همدیس، معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار توده سنگ در تونل نیم‌دایره‌ای تحت تنش‌ها محاسبه شده است. تنش‌های مماسی، شعاعی و برشی در مرز تونل در حالت‌های مختلف از جمله تنش برجای تک محوره افقی، قائم و تنش هیدرواستاتیک با استفاده از نگاشت سه، چهار و پنج جمله‌ای محاسبه شده‌اند. در نهایت معادلات مورد استفاده با مدل‌سازی عددی مقایسه شده است. براساس مقایسه‌های انجام گرفته، هر دو روش تحلیلی و عددی نتایج مشابهی را ارائه می‌کنند و به‌صورت موضعی در اطراف تونل در مقادیر تنش حاصل شده اختلافاتی وجود دارد. می‌توان گفت که مقادیر تنش حاصل شده براساس مبانی موجود در هر دو روش صحیح است و در طراحی تونل، مقادیر هر دو روش با در نظر گرفتن ضرایب اطمینان مناسب و تجربه مهندس قابل استفاده است.	تونل نیم‌دایره تحلیل تنش روش تحلیلی توابع پتانسیل مختلط نگاشت همدیس تحلیل عددی

۱- پیش‌گفتار

نمی‌توانند خودنگهدار باشند و برای پابرجا نگاه‌داشتن آن‌ها باید از حائل‌هایی استفاده کرد. به نظر می‌رسد که مهم‌ترین عامل در طراحی تونل، یا هر فضای زیرزمینی دیگر، تأمین پایداری آن است. یکی از مقاطع پرکاربرد در ساخت تونل‌های حمل و نقل به خصوص تونل‌های بزرگ مقطع تونل‌های با مقطع نیم‌دایره است. از نمونه‌های تونل با مقطع نیم‌دایره در ایران و جهان می‌توان به تونل کوهسار شیراز،

تونل‌ها و فضاهای زیرزمینی برای مقاصد گوناگونی ساخته می‌شوند. تونل‌های حمل و نقل و دسترسی، تونل‌های آب بر و فضاهای زیرزمینی از جمله این موارد هستند. در هر مورد طراح باید ضمن آگاهی دقیق از شرایط زمین، در جهت بهبود کیفیت مصالحی که قرار است تونل در آن حفر شود، اقدام نماید. در بسیاری از زمین‌ها تونل‌های حفر شده

تعدادی از مقاطع تونل را که به‌وسیله این روش به‌دست می‌آید ترسیم نموده است. مانند سایر راه‌حل‌های بسته، این یک ابزار ارزشمند برای درک مفهومی چگونگی تأثیر پارامترهای خاص بر تنش‌ها است. به خصوص، برای مطالعه تأثیر تنش‌های درجا و مقاومت توده سنگ بر شکل و اندازه مناطق بیش از حد تحت فشار در اطراف دهانه‌ها مفید است. اکساداکتلیوس و استاوروپولو در سال ۲۰۰۲ نشان دادند که توابع پتانسیل مختلط می‌تواند به‌طور

موفقیت‌آمیزی برای حل مسایل الاستیسیته صفحه‌ای در تونل‌های دارای مقطع عرضی با یک محور تقارن و کشش‌های سطحی استفاده شود (Exadaktylos & Stavropoulou, 2002). او نیز از روش گرچک ۱۹۹۷ برای رسم نمودار نگاهت همدیس انواع مقاطع استفاده نمود. او نتایج حاصل از معادلات را با مدل‌سازی عددی مقایسه نموده است. در این مطالعه یک راه‌حل دقیق برای تنش‌ها و جابجایی‌ها در اطراف تونل‌های دارای گوشه‌های گرد ارائه شده است. در این پژوهش آمده است که هر دو مدل، تنش‌های مرزی و جابجایی‌ها را بجز گوشه و مناطق کف‌بند پیش‌بینی می‌کنند.

در سال ۲۰۰۶ هو و همکاران برای سازه‌ای مستطیل شکل که تحت موج برشی است یک روش تحلیلی براساس تئوری متغیرهای مختلط و نگاهت همدیس ارائه نمودند (Huo, et al., 2006). همچنین از یک تحلیل عددی نیز در کنار روش تحلیلی استفاده کردند.

در سال ۲۰۰۸ لی و وانگ در تونل‌های دایره‌ای با آستر تحت تنش‌های برجا و برشی با استفاده از توابع پتانسیل مختلط، یک راه‌حل کرنش صفحه‌ای الاستیک ارائه دادند (Li & Wang, 2008). در این پژوهش آمده است که با استفاده از توابع پتانسیل مختلط که ابتدا توسط مشخلیشویلی تاسیس شد، یک راه‌حل کرنش الاستیک صفحه‌ای برای تنش‌ها و جابجایی‌های اضافی در اطراف یک تونل مدور دایره‌ای شکل در یک مصالح زمینی ایزوتروپیک به دلیل بارهای ثقلی یکنواخت و بارهای داخلی ارائه شده است.

در سال ۲۰۱۱ باتیستا با استفاده از توابع مختلط موسخلیشویلی و نگاهت شوارتز-کریستوفل (Schwartz-Christoffel) میدان تنش‌ها و جابجایی‌ها در اطراف حفرات

تونل امام رضا در جاده اردبیل سرچم، تونل یامت (Yamate Tunnel) در ژاپن، تونل تیان‌شیان میانه (Middle Tianshan Tunnel) در چین و تونل یربا بوئنا (Yerba Buena Tunnel) در سان‌فرانسیسکو نام برد. برای طراحی از این قبیل تونل‌ها نیاز به شناخت تنش‌های موجود در اطراف تونل قبل و بعد از احداث است. بنابراین از مهم‌ترین نیازهای طراحی تونل، محاسبه‌ی تنش در محیط سنگی اطراف آن می‌باشد.

طراحی و تحلیل تونل‌ها با سه روش تجربی، عددی و تحلیلی انجام می‌شود. بر خلاف روش‌های عددی در روش‌های تحلیلی به معادلات بسته‌ای می‌رسیم که روند عمومی تأثیر متغیرها را نشان می‌دهند. اگر چه بسیاری از مسائل طراحی تونل با استفاده از مدل‌های عددی بهتر از روش‌های تحلیلی حل می‌شوند اما از روش‌های تحلیلی برای حل این‌گونه مسایل نباید چشم پوشی شود زیرا که روش‌های عددی با وجود توانایی بالا در حل مسائل پیچیده دارای معایبی همچون وابستگی به شرایط مرزی، وابستگی به ابعاد المان‌ها، نوع توابع تقریب، وجود گرادیان بالای تنش و... هستند. در اکثر روابط تحلیلی نیاز به ساده‌سازی‌هایی نظیر پذیرفتن رفتار الاستیک خطی سنگ است. اما برخی از پدیده‌ها تنها توسط روابط تحلیلی با اطمینان بالا تعیین می‌شوند. استفاده از توابع پتانسیل مختلط در محاسبه‌ی میدان تنش و جابجایی در محیط الاستیک کاربرد دارد. از جمله کاربردهای اصلی این روش در مسایل متعدد توسط کولوسو در سال ۱۹۰۹ ارائه شده است (Kolosso, 1909). محققین دیگری از جمله موسخلیشویلی و ساوین نیز کاربردهای دیگر این تئوری را توسعه دادند (Muskhilishvili, 1954) (Savin, 1961).

ساوین در سال ۱۹۶۱ با استفاده از توابع پتانسیل مختلط و انواع نگاهت همدیس برای برخی مقاطع تونل، معادلات تنش را محاسبه نموده و به بررسی انواع تنش‌ها از جمله تنش‌های مماسی پرداخته است (Savin, 1961).

گرچک در سال ۱۹۹۷ یک راه‌حل الاستیک برای محاسبه تنش اطراف تونل‌های با مقاطع مرسوم را ارائه داد (Gercek, 1997). نگاهت همدیس مورد استفاده در مطالعه او از شکل (Cardeloid) بیورکمن - ریچارد است (Bjorkman & Richards, 1979). گرچک در این مطالعه

در سال ۱۳۹۴ امجدیان با استفاده از توابع پتانسیل مختلط راه‌حلی تحلیلی برای تعیین تنش‌های اطراف تونل مربعی و مستطیلی تحت تنش‌های برجا ارائه داده است (Amjadian, 2014). او با استفاده از نگاشت همدیس مقطع تونل مربعی را به شکل دایره معادل نموده و توده سنگ به صورت الاستیک و ایزوتروپ در نظر گرفته شده است.

ناظم و همکاران در سال ۲۰۱۵ برای محاسبه توابع نگاشت همدیس شش مقطع مختلف با شکل‌های نیم‌دایره‌ای، سهمی شکل و قوسی، دو روش عددی ارائه دادند (Nazem, et al., 2015) در این پژوهش ثابت کرده‌اند که هرکدام از ضرایب خاصی که در رابطه نگاشت همدیس وجود دارد کنترل کاملی بر ویژگی‌های خاص اشکال تونل مانند نسبت ارتفاع به عرض و شعاع انحنای پایین و بالا دارند.

در سال ۲۰۱۷ وانگ و همکاران مجموعه‌ای از راه‌حل‌های تحلیلی برای محاسبه تنش‌ها و جابجایی‌های ایجاد شده هنگام حفاری دو تونل دایره‌ای نزدیک به هم در سنگ ویسکوالاستیک ارائه کرده‌اند (Wang, et al., 2017). در راه‌حل‌های ارائه شده حفاری متوالی تونل‌ها نیز در نظر گرفته شده است. شعاع تونل‌های دوقلو توابع وابسته به زمان هستند که فرآیند حفاری اتخاذ شده را منعکس می‌کنند. راه‌حل‌ها به صورت عبارات تحلیلی به صورت انتگرال ارائه شده‌اند. در این پژوهش آمده‌است که مقایسه تنش‌ها و جابجایی‌های پیش‌بینی‌شده توسط راه‌حل‌های تحلیلی و تحلیل‌های *FEM* تطابق خوبی بین دو روش را نشان می‌دهد.

زمانی در سال ۱۳۹۸ در مقاله‌ای به بررسی نگاشت همدیس برای انواع مقاطع تونل جهت تحلیل تنش‌ها پرداخته است که برای تونل با مقطع نیم‌دایره از معادله ساوین استفاده نموده است (Zamani, 2018).

در سال ۲۰۱۹ لی و همکاران با استفاده از راه‌حل‌های تحلیلی، مقادیر تنش‌ها و جابجایی‌های یک تونل دایره‌ای کم‌عمق در یک نیم صفحه الاستیک تحت بارهای توزیع شده دلخواه بر سطح زمین بر اساس روش متغیر مختلط، محاسبه شده است (Li, et al., 2019). شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده، نتایج به دست آمده از مدل تحلیلی را

غیر دایره‌ای را تعیین نمود (Batista, 2011).

در سال ۲۰۱۲ زمانی وضعیت تنش اطراف تونل دایره‌ای برای دامنه تنش اصلی و غیراصولی با روش‌های تحلیلی را محاسبه کرده است (Zamani, 2012). این روش برای تحلیل دو بعدی دقیق است زیرا معادلات تعادل، سازگاری و شرایط مرزی را برآورده می‌کند. می‌توان از آن برای بررسی و صحت‌سنجی روش‌های عددی موجود در این زمینه استفاده کرد.

عالمی در سال ۱۳۹۲ تنش اطراف تونل‌های بیضوی تحت میدان برشی را به روش تحلیلی و با استفاده از تئوری توابع پتانسیل مختلط محاسبه نمود (Alami, 2013). او در این پایان‌نامه به نتایج زیر دست یافته است:

- ۱- در تونل‌های دایره‌ای شعاع تونل و زاویه نسبت به محور افقی از جمله پارامترهای تاثیرگذار می‌باشد.
- ۲- در تنش‌های اطراف تونل‌های دایره‌ای تغییرات نسبت فاصله از محور تونل به شعاع آن تاثیرگذار نمی‌باشد.
- ۳- در تونل‌های بیضوی، نسبت قطر بزرگ به کوچک، زاویه نسبت به محور افقی و زاویه‌ی چرخش تونل از جمله پارامترهای تعیین کننده می‌باشند و با دور شدن از تونل تاثیر پارامترهای فوق کمتر می‌شود.

کارگر و همکاران در سال ۱۳۹۳ در پژوهش خود راه‌حلی تحلیلی برای تعیین میدان تنش در اطراف مغارهای گازی، تحت فشار داخلی ثابت، ارائه دادند (Kargar, et al., 2013). به علت پیچیدگی در حل مساله برای شکل غیردایره‌ای مغار، توابع پتانسیل مختلط موسخلیشویلی همراه با نگاشت همدیس مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در نهایت جواب‌های تحلیلی با مقادیر بدست آمده از مدل‌سازی عددی بررسی و مقایسه شده است. همچنین آن‌ها در سال ۲۰۱۴، یک راه حل الاستیک نیمه تحلیلی برای میدان تنش تونل‌های غیر دایره‌ای عمق زیاد ارائه نموده‌اند (Kargar, et al., 2014). در این پژوهش به مدل‌سازی با المان محدود نیز پرداخته شده است.

زمانی و همکاران در سال ۱۳۹۴ برپایه توابع پتانسیل موسخلیشویلی (Muskhelishvili) و با استفاده از نگاشت دو جمله‌ای، سه جمله‌ای و چهار جمله‌ای و نیز در شرایط مرزی مختلف، تنش مماسی در مرز تونل با مقطع مربع را مورد بررسی قرار داده‌اند (Zamani, et al., 2014).

پرداخته می‌شود. در حالی که در روش‌های عددی به حل تقریبی و عددی این مسائل پرداخته می‌شود. بنابراین برای طراحی تونل، یک مهندس طراح بایستی قادر به شناسایی درستی از مقادیر تنش در یک توده سنگ باشد و این موضوع از طریق تسلط مهندس بر هر دو روش تحلیلی و عددی میسر خواهد بود.

با بررسی مطالعات پیشین در زمینه توزیع تنش اطراف تونل‌های نیم‌دایره‌ای به روش تحلیلی (توابع مختلط) و مقایسه با نتایج تحلیل عددی مشاهده می‌شود که پژوهش حاضر نسبت به مطالعات پیشین دارای نوآوری‌هایی از جمله موارد زیر می‌باشد:

۱- در اکثریت مطالعات محققان پیشین نوع مقطع تونل با پژوهش حاضر متفاوت است. این نکته از آن نظر اهمیت دارد که تفاوت در شکل مقطع تونل باعث اختلاف در معادلات حاصل شده و در نتیجه آن، مقادیر و محل تنش‌های متمرکز می‌گردد.

نوآوری‌های این پژوهش نسبت به پژوهش‌هایی همچون اکسادکتلیوس و استاوروپولو (۲۰۰۲) که مقطع تونل در آن مشابه پژوهش حاضر می‌باشد، نیز در موارد زیر بررسی گردیده است.

۲- در پژوهش اکسادکتلیوس و استاوروپولو (۲۰۰۲) مقادیر تنش در یک سمت محور تقارن تونل بررسی شده است و تنش‌ها در کف تونل بررسی نشده است که در این پژوهش مقادیر تنش در کل مرز تونل بررسی می‌گردد و شامل تنش‌های قائم، افقی و هیدرواستاتیک می‌باشد.

۳- مقطع مورد استفاده در تحلیل عددی پژوهش اکسادکتلیوس و استاوروپولو (۲۰۰۲)، D شکل می‌باشد اما در پژوهش حاضر در هر دو روش تحلیلی و عددی مقطع تونل بر اساس نگاشت همدیس نیم‌دایره است.

۴- نگاشت همدیس مورد استفاده در پژوهش اکسادکتلیوس و استاوروپولو (۲۰۰۲) تقارن هندسی ندارد و باعث پیچیدگی در محاسبات می‌گردد اما در این پژوهش از نگاشت همدیس زمانی، ۱۳۹۸ که دارای تقارن هندسی است استفاده می‌شود.

۵- در این پژوهش تفاوت دقت محاسبات براساس تعداد جملات نگاشت مشخص گردیده است.

در این پژوهش با استفاده از نگاشت همدیس و توابع

تایید می‌کند. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که هرچه موقعیت نسبی بین تونل و بارهای توزیع شده نزدیک‌تر باشد، روند ادغام مناطق پلاستیکی بالقوه اطراف تونل و مناطق پلاستیکی بالقوه اطراف بارهای توزیع شده نزدیک‌تر می‌شود.

در سال ۲۰۲۰ فن و همکاران یک راه حل تحلیلی برای تنش‌ها و تغییر شکل‌های تونل‌ها در یک میدان تنش غیریکنواخت بر اساس مدل نرم‌شدن کرنش و معیار *Mogi-Coulomb* ارائه نمودند. در این مطالعه، یک مدل مکانیکی برای تونل‌های حفاری شده در یک میدان تنش غیریکنواخت توسعه داده شده است (Fan, et al., 2020). سپس، یک راه‌حل تحلیلی برای محاسبه تنش‌ها و جابجایی‌ها استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که توزیع تنش در اطراف تونل به دلیل میدان تنش غیریکنواخت، تغییر می‌کند.

از جمله مطالعات دیگر در زمینه تئوری الاستیسیته و بررسی تنش‌های اطراف تونل می‌توان به استیونسون، انگلند، اکساداکلیوس و همکاران و تیموشنکو و همکاران نام برد (Stevenson, 1945)؛ (England, 1971)؛ (Timoshenko & Exadaktylos, et al., 2003)؛ (Goodier, 1970). با توجه به اهمیت و گستره استفاده از تونل‌ها در کاربری‌های متفاوت، نیاز به طراحی و ساخت تونل‌هایی ایمن و کارآمد می‌باشد. به طور مثال در صنعت حمل و نقل از مقاطع پرکاربرد تونل، مقطع نیم‌دایره است. مهم‌ترین عامل در طراحی تونل تأمین پایداری آن است و برای رسیدن به این مهم بایستی از شرایط تنش‌های اطراف تونل آگاهی داشت. دسترسی و استفاده از نرم‌افزارهای کامپیوتری نظیر المان محدود، تفاضل محدود، المان‌های مرزی و... باعث شده است که آنالیز این مسایل آسان شود. کارنزا - توریس و فایرهاست به طور واضح تغییر شکل حفاری‌های زیرزمینی را در مطالعاتشان بررسی کردند و نشان دادند که اگر چه بسیاری از مسایل طراحی ژئوتکنیکی با استفاده از مدل‌های عددی بهتر از روش‌های تحلیلی حل می‌شوند اما از حل طبیعی عمومی (مانند تأثیر متغیرهای پیچیده) که می‌تواند از حل کلاسیکی بدست آید نباید چشم‌پوشی شود (Carranza-Torres & Fairhurst, 1999). زیرا در روش‌های تحلیلی به محاسبه دقیق پارامتری معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار محیط اطراف تونل‌ها

که در معادله ۱ ضرایب a_1 تا a_5 برابر مقادیر زیر است.

$$a_1 = 0.312, a_2 = -0.156, a_3 = -0.050, a_4 = 0.0019, a_5 = 0.015$$

مدل دیگری جهت نگاشت مقاطع نیم‌دایره‌ای و به صورت معادله ۲ محاسبه شده است که دارای ضرایب کمتری است. همچنین در اینجا محور x محور تقارن تونل و جهت مثبت آن به سمت سقف تونل می‌باشد (Zamani, 2018).

$$z = w(\zeta) = R(c_0\zeta + c_1\zeta^{-1} + c_2\zeta^{-2} + c_3\zeta^{-3} + c_4\zeta^{-4}) \quad (2)$$

که در آن $c_0 = 10.113$ و $c_1 = -3.144$ ، $c_2 = -0.02$ ، $c_3 = -0.5$ ، $c_4 = 1.578$ برای تونل نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱۳ متر است. نگاشت حاصله در شکل ۱، مشاهده می‌شود. در شکل مذکور دایره‌های هم مرکز در مختصات ζ های ثابت و η های مربوط به ζ های ۰، ۰/۲۵، ۰/۵ و ۱ و خطوط شعاعی با η های ثابت و هر یک به فاصله ۱۸ درجه می‌باشند.

با توجه به اینکه نگاشت با معادله ۲ دارای ضرایب کمتری می‌باشد و عملاً محاسبات ساده‌تر می‌گردد، بنابراین از نگاشت همدیس مطابق با معادله ۲ برای حل مساله استفاده می‌شود. براساس رابطه زیر دو تابع پتانسیل مختلط تعریف می‌شود (Savin, 1961). معادلات ۳ الی ۱۳ را می‌توان در پژوهش‌های موشخیلیشویلی (۱۹۵۴) و ساوین (۱۹۶۱) مشاهده نمود.

$$\begin{cases} \varphi_1(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1+x)} \ln z + \Gamma z + \varphi_1^0(z) \\ \psi_1(z) = \frac{x(X - iY)}{2\pi(1+x)} \ln z + \Gamma' z + \psi_1^0(z) \end{cases} \quad (3)$$

در این رابطه X و Y برآیند نیروهای خارجی در جهت x و y می‌باشد و در صورت موجود نبودن نیروی خارجی برابر صفر خواهند بود. همچنین $\varphi_1^0(z) = a'_0 + \frac{a'_1}{z}$

پتانسیل مختلط به تعیین معادلات تنش در تونل نیم‌دایره‌ای پرداخته شده‌است. سپس نتایج حاصل شده با مدل‌سازی عددی تونل در نرم‌افزار *FLAC* مقایسه شده‌است.

۲- بیان مساله

مساله مورد بررسی، تعیین تنش در اطراف تونل نیم‌دایره‌ای می‌باشد. با استفاده از تئوری الاستیسیته در تعیین تنش‌های اطراف تونل فرضیات مواد الاستیک برای توده سنگ نیز پذیرفته می‌شود. بر اساس این فرضیات توده سنگ به صورت یک محیط پیوسته درون یک لایه همگن و همسانگرد می‌باشد. حل مسایل الاستیک از روش اعداد مختلط تنها برای شکل دایره امکان پذیر است. با توجه به این موضوع با در اختیار داشتن نگاشت مناسب برای تبدیل شکل مورد نظر به دایره این‌گونه مسائل قابل حل می‌باشند. همچنین طبق قضیه ریمان هر ناحیه پیوسته در صفحه اعداد مختلط با یک سوراخ به شکل دلخواه می‌تواند به یک دایره واحد نگاشته شود.

بنابراین ابتدا باید نگاشت نیم‌دایره مناسب بررسی شود، سپس براساس معادلات الاستیک و با استفاده از توابع پتانسیل مختلط به حل مسئله و یافتن یک راحل بسته ریاضی برای محاسبه تنش‌ها پرداخت. در ادامه به روند حل مسئله براساس توابع پتانسیل مختلط موشخیلیشویلی (۱۹۵۴) و ساوین (۱۹۶۱) پرداخته شده است.

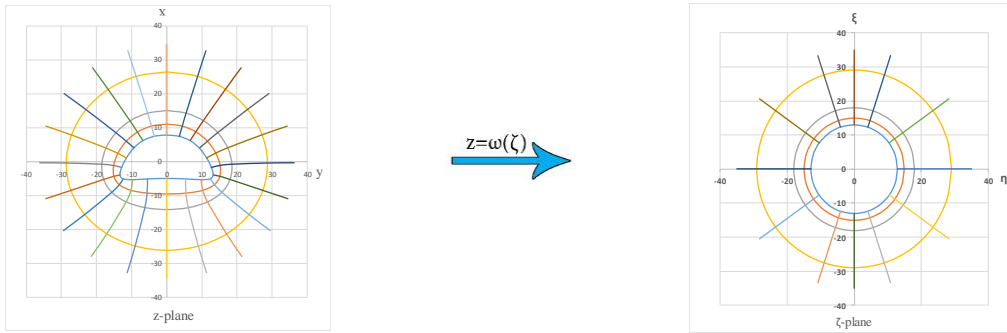
۳- روابط پایه در تحلیل تنش اطراف تونل نیم‌دایره‌ای

بنابراین با توجه به توضیحات آمده در بخش قبل، در جهت روند حل مسئله به بررسی نگاشت همدیس پرداخته می‌شود. ساوین در سال ۱۹۶۱ نگاشت همدیس معادله زیر را جهت تونل‌های با مقاطع نیم‌دایره‌ای و با مبدأ مختصات واقع در مرکز ثقل تونل و محور x عمود بر قطر تونل در نظر گرفت.

$$z = w(\zeta) = R(\zeta + a_1\zeta^{-1} + a_2\zeta^{-2} + a_3\zeta^{-3} + a_4\zeta^{-4} + a_5\zeta^{-5}) \quad (1)$$

برابر N_1 و N_2 باشد. همچنین در این رابطه α زاویه N_1 در بی‌نهایت با محور x ها است. یک صفحه‌ی الاستیک و ایزوتروپ که تحت تنش قرار دارد فرض می‌شود. با ایجاد حفره‌ای درون این صفحه توزیع تنش در آن تغییر می‌کند.

$\alpha = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ $\psi_1^0(z) = b'_0 + \frac{b'_1}{z} + \frac{b'_2}{z^2} + \dots + \frac{a'_2}{z} + \dots$
 $B_1 = \frac{N_1+N_2}{4}$ $\Gamma = B'_1 + iC'_1$ $\Gamma = B_1 + iC_1$
 $C'_1 = \frac{N_1-N_2}{2} \sin 2\alpha$ و $B'_1 = -\frac{N_1-N_2}{2} \cos 2\alpha$
 می‌باشد (Savin, 1961). در این روابط ν ضریب پواسون می‌باشد و فرض می‌شود مقدار تنش‌های اصلی در بی‌نهایت



شکل ۱- نمودار نگاشت هم‌مدیس معادله ۲ برای تونل نیم‌دایره (زمانی، ۱۳۹۸)

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+x)} \ln \zeta + R\Gamma\zeta \\ \quad + \varphi_0(\zeta) \\ \psi(\zeta) = \frac{x(X-iY)}{2\pi(1+x)} \ln \zeta + R\Gamma'\zeta \\ \quad + \psi_0(\zeta) \end{cases} \quad (۶)$$

می‌توان گفت که توابع مختلط این توابع نیز وجود دارند. با توجه به این‌که $z = \omega(\zeta)$ بنابراین مطابق رابطه (۴) نتیجه می‌دهد (Savin, 1961):

$$\begin{cases} \varphi_1[\omega(\zeta)] = \varphi^0[\omega(\zeta)] + \varphi^*[\omega(\zeta)] \\ \psi_1[\omega(\zeta)] = \psi^0[\omega(\zeta)] + \psi^*[\omega(\zeta)] \end{cases} \quad (۴)$$

که در این رابطه $\varphi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta^{-n}$ و $\psi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \zeta^{-n}$ سایر پارامترهای معادله ۶ مانند رابطه ۳ است. با استفاده از رابطه ۷ که توسط موشخیلیشویلی (۱۹۵۴) و ساوین (۱۹۶۱) ارائه شده است، می‌توان $\psi_0(\zeta)$ و $\varphi_0(\zeta)$ به‌دست آورد (Savin, 1961):

در معادله ۴ توابع $\varphi^*[\omega(\zeta)]$ و $\psi^*[\omega(\zeta)]$ مجهول هستند. این دو تابع همان توابع $\varphi_1^0(z)$ و $\psi_1^0(z)$ می‌باشند. همچنین توابع $\varphi^0[\omega(\zeta)] = \varphi_1[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta)$ $\varphi^1(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta)$ $\varphi^*[\omega(\zeta)] = \varphi_0(\zeta)$ $\varphi^1(\zeta) = \psi^1(\zeta)$ $\psi^*[\omega(\zeta)] = \psi_0(\zeta)$ و $\psi^0[\omega(\zeta)] = \psi_1(\zeta)$ می‌شوند، بنابراین مطابق رابطه (۵) نتیجه می‌دهد (Savin, 1961) (Muskhilishvili, 1954):

$$\begin{cases} \varphi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\omega(\sigma) \overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\omega'(\sigma) \sigma - \zeta} d\sigma \\ \quad = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f_0}{\sigma - \zeta} d\sigma \\ \psi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\overline{\omega(\sigma) \varphi_0'(\sigma)}}{\omega'(\sigma) \sigma - \zeta} d\sigma \\ \quad = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\overline{f_0}}{\sigma - \zeta} d\sigma \end{cases} \quad (۷)$$

$$\begin{cases} \varphi_1(\omega(\zeta)) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+x)} \ln \omega(\zeta) \\ \quad + \Gamma\omega(\zeta) + \varphi_1^0(\omega(\zeta)) \\ \psi_1(\omega(\zeta)) = \frac{x(X-iY)}{2\pi(1+x)} \ln \omega(\zeta) \\ \quad + \Gamma'\omega(\zeta) + \psi_1^0(\omega(\zeta)) \end{cases} \quad (۵)$$

$\overline{f_0}$ مزدوج تابع f_0 می‌باشد. تابع مرزی تنش (f_0) به صورت زیر تعریف شده است (Savin, 1961):

با توجه به توابع معرفی شده، رابطه (۶) به دست می‌آید (Savin, 1961) (Muskhilishvili, 1954):

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = \frac{p}{4}[\omega(\zeta)] + \varphi_0(\zeta) \\ \psi(\zeta) = -\frac{p}{2}e^{-2i\alpha}[\omega(\zeta)] + \psi_0(\zeta) \end{cases} \quad (11)$$

در کشش و یا فشار تک محوره ($N_1 = p$ و $N_2 = 0$) براساس توابع معرفی شده رابطه (۱۲) به دست می‌آید (Savin, 1961) (Muskhilishvili, 1954):

$$\begin{cases} B_1 = \frac{1}{4}(N_1 + N_2) = \frac{p}{4} \\ B'_1 + iC'_1 = \frac{1}{2}(N_2 - N_1 + 2iN_3)e^{-2i\alpha} = -\frac{p}{2}e^{-2i\alpha} \end{cases} \quad (12)$$

با استفاده از رابطه ۸، رابطه (۱۳) به دست می‌آید (Savin, 1961):

$$\begin{cases} f_0 = -2B_1\omega(\sigma) - (B'_1 - iC'_1)\overline{\omega(\sigma)} \\ \quad = -\frac{p}{2}[\omega(\sigma) - e^{2i\alpha}\overline{\omega(\sigma)}] \\ \bar{f}_0 = -2B_1\overline{\omega(\sigma)} - (B'_1 + iC'_1)\omega(\sigma) \\ \quad = -\frac{p}{2}[\overline{\omega(\sigma)} - e^{-2i\alpha}\omega(\sigma)] \end{cases} \quad (13)$$

با جایگذاری رابطه ۱۳ در معادلات ۷ توابع $\varphi_0(\zeta)$ و $\psi_0(\zeta)$ به دست می‌آیند. سپس با کمک روابط ۱۱ توابع $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$ حاصل می‌شوند.

۴- تحلیل تنش روی سطح تونل نیم‌دایره‌ای ($\rho = 1$)

براساس رابطه ۲، این نگاشت دارای تعداد جملات می‌باشد. بنابراین از تعداد جملات کافی که دقت مورد نظر را برآورده کند باید استفاده شود. براین اساس نگاشت در جمله سوم، چهارم و پنجم شکلی از مقطع نیم‌دایره را تشکیل می‌دهد. با در نظرگیری جملات اول و دوم نمودار مشابه با اشکال دایره و بیضی می‌باشد. با توجه به مطالب گفته شده در ساده‌ترین حالت سه جمله اول این نگاشت در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} f_0 &= i \int (\bar{X} + i\bar{Y}) ds - \frac{X + iY}{2\pi} \ln \sigma \\ &= -\frac{1+v}{8\pi} (X - iY) \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \sigma \\ &= -2B_1\omega(\sigma) - (B'_1 - iC'_1)\overline{\omega(\sigma)} \end{aligned} \quad (8)$$

با قرار دادن توابع $\varphi_0(\zeta)$ و $\psi_0(\zeta)$ در معادله ۶ مقدار توابع $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$ حاصل می‌شود. بنابر نظریه‌های موجود در پژوهش‌های موسخیلیشویلی و ساوین، توابع پتانسیل مختلط $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$ بر حسب مولفه‌های تنش در دستگاه مختصات قطبی و $z = \omega(\zeta)$ به صورت معادلات ۹ می‌باشند، نتیجه می‌دهد (Savin, 1961) (Muskhilishvili, 1954):

$$\begin{cases} \sigma_\rho + \sigma_\theta = 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}] \\ \quad = 4\text{Re}\Phi[\zeta] \\ \sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} \\ \quad = \frac{2\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\rho^2 \overline{\omega'(\zeta)}} \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta) \right] \end{cases} \quad (9)$$

در این رابطه $\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$ و $\Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$ است. با توجه به این‌که $\zeta = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ و روی سطح تونل $\rho = 1$ ، $\tau_{\rho\theta} = 0$ ، $\sigma_\rho = 0$ در نتیجه $\sigma_\theta = 4\text{Re}[\Phi(\zeta)]$ و $\sigma = e^{i\theta}$ می‌باشد. اگر تنش P به صفحه‌ای وارد شود به صورتی که با محور x زاویه α بسازد، تنش‌ها قابل محاسبه هستند و تابع تنش نیز از رابطه ۱۰ محاسبه می‌شود (Savin, 1961):

$$U_0(x,y) = \frac{p}{2}(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2 \quad (10)$$

با مشتق‌گیری از تابع تنش و انجام محاسبات مربوطه و با فرض این‌که سوراخی در صفحه‌ای ایجاد شود و مرکز این سوراخ بر مرکز دستگاه مختصات منطبق باشد و نیروهای خارجی نیز صفر باشند، براساس معادله ۴ نتیجه می‌شود (Savin, 1961) (Muskhilishvili, 1954):

$$= \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{\zeta} + \alpha_2 \frac{1}{\zeta^2} + \dots - 0.156\bar{\alpha}_1 + 0 + 0 + \dots \quad (17)$$

با استفاده از قسمت سمت راست اولین معادله ۷ معادله (۱۸) نتیجه می‌شود:

$$= -\frac{p}{2} [1.578\zeta^{-2} - (3.144 + 10.113e^{2i\alpha})\zeta^{-1}] \quad (18)$$

معادلات ۱۷ و ۱۸ مساوی قرار داده می‌شود و با حل دستگاه معادلات مربوطه ضرایب α_0 ، α_1 و α_2 معین می‌گردد. با جایگذاری این ضرایب در رابطه $\varphi_0(\zeta)$ و با مشتق‌گیری از آن معادله زیر حاصل می‌شود.

$$\varphi'_0(\zeta) = \frac{p}{2} [-a_1 \zeta^{-2} + 3.156\zeta^{-3}] \quad (19)$$

با استفاده از قسمت سمت چپ دومین معادله ۷ معادله (۲۰) حاصل می‌شود:

$$= \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{\zeta} + \beta_2 \frac{1}{\zeta^2} + \dots + \frac{p}{2} [-0.156a_1 - a_0 a_1 + (0.492 + 3.156a_0)\zeta^{-1}] \quad (20)$$

با استفاده از قسمت سمت راست دومین معادله ۷ معادله (۲۱) حاصل می‌شود:

$$= -\frac{p}{2} \begin{bmatrix} 10.113\zeta^{-1} \\ -e^{-2i\alpha}(-3.144\zeta^{-1} + 1.578\zeta^{-2}) \end{bmatrix} \quad (21)$$

در این روابط داریم:

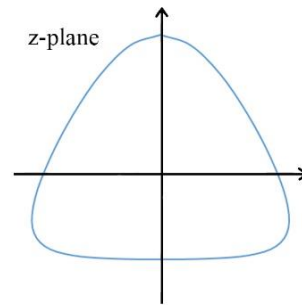
$$\begin{cases} a_0 = \frac{10.605 - 3.144\zeta^2 - 0.49\zeta^1}{10.113\zeta^3 + 3.144\zeta} \\ a_1 = \begin{bmatrix} -3.156 \\ 3.144 \\ +10.113 \cos 2\alpha \\ +i10.113 \sin 2\alpha \end{bmatrix} \end{cases} \quad (22)$$

معادلات ۲۰ و ۲۱ مساوی قرار داده می‌شود و با حل

$$\omega(\zeta) = 10.113\zeta - 3.144\zeta^{-1} + 1.578\zeta^{-2} \quad (14)$$

با توجه به این که $\zeta = \rho e^{i\theta}$ ، $\rho = 1$ ($\xi = 0$) و $\eta = \theta$ ، با جداکردن قسمت حقیقی و موهومی معادله ۱۴ می‌توان نگاشت همدیس سه جمله‌ای را در دستگاه مختصات کارتزین مطابق شکل ۲، رسم نمود. براساس رابطه ۱۴ و ۱۱، رابطه (۱۵) به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = \frac{p}{4}(10.113\zeta - 3.144\zeta^{-1} + 1.578\zeta^{-2}) + \varphi_0(\zeta) \\ \psi(\zeta) = -\frac{p}{2}e^{-2i\alpha}(10.113\zeta - 3.144\zeta^{-1} + 1.578\zeta^{-2}) + \psi_0(\zeta) \end{cases} \quad (15)$$



شکل ۲- مقطع نیم‌دایره با استفاده از نگاشت سه جمله‌ای

با استفاده از معادلات زیر می‌توان $\varphi_0(\zeta)$ و $\psi_0(\zeta)$ را یافت. با استفاده از معادلات ۱۳، رابطه (۱۶) به دست می‌آید:

$$\begin{cases} f_0 = -\frac{p}{2} \begin{bmatrix} 10.113\sigma \\ -3.144\sigma^{-1} \\ +1.578\sigma^{-2} \\ -e^{2i\alpha}(10.113\sigma^{-1} - 3.144\sigma^1 + 1.578\sigma^2) \end{bmatrix} \\ \bar{f}_0 = -\frac{p}{2} \begin{bmatrix} 10.113\sigma^{-1} \\ -3.144\sigma^1 \\ +1.578\sigma^2 \\ -e^{-2i\alpha} \begin{bmatrix} 10.113\sigma \\ -3.144\sigma^{-1} \\ +1.578\sigma^{-2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (16)$$

با استفاده از قسمت سمت چپ اولین معادله ۷ معادله (۱۷) به دست می‌آید:

با قرار دادن $\alpha = 0$ در تابع پتانسیل مختلط $\varphi(\zeta)$ در رابطه ۲۴ و براساس اولین روابط موجود در رابطه ۹ تنش تک محوره افقی با استفاده از نگاشت همدیس سه جمله‌ای مطابق رابطه (۲۵) حاصل می‌شود.

$$\sigma_{\theta} = 4Re \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] = p \begin{bmatrix} 18.824 \\ +0.044\cos 3\theta \\ -204.528\cos 2\theta \\ +83.684\cos \theta \\ 122.118 \\ -63.834\cos 3\theta \\ +63.59\cos 2\theta \\ -19.844\cos \theta \end{bmatrix} \quad (25)$$

به همین ترتیب با قرار دادن $\alpha = 90$ تنش تک محوره قائم با استفاده از نگاشت همدیس سه جمله‌ای مطابق رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\sigma_{\theta} = 4Re \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] = p \begin{bmatrix} 145.992 + 0.044\cos 3\theta \\ +204.52\cos 2\theta - 43.968\cos \theta \\ 122.118 - 63.834\cos 3\theta \\ +63.59\cos 2\theta - 19.844\cos \theta \end{bmatrix} \quad (26)$$

بر این اساس با جایگذاری مقادیر مختلف θ مطابق شکل ۳، تنش‌های مماسی در این حالت رسم می‌شوند. با توجه به اینکه هرچه تعداد جملات نگاشت بیشتر باشد دقت محاسبات بیشتر خواهد بود، نگاشت چهار جمله‌ای مطابق رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود و نگاشت حاصله مطابق شکل ۴ خواهد بود.

$$z = \omega(\zeta) = 10.113\zeta - 3.144\zeta^{-1} + 1.578\zeta^{-2} - 0.5\zeta^{-3} \quad (27)$$

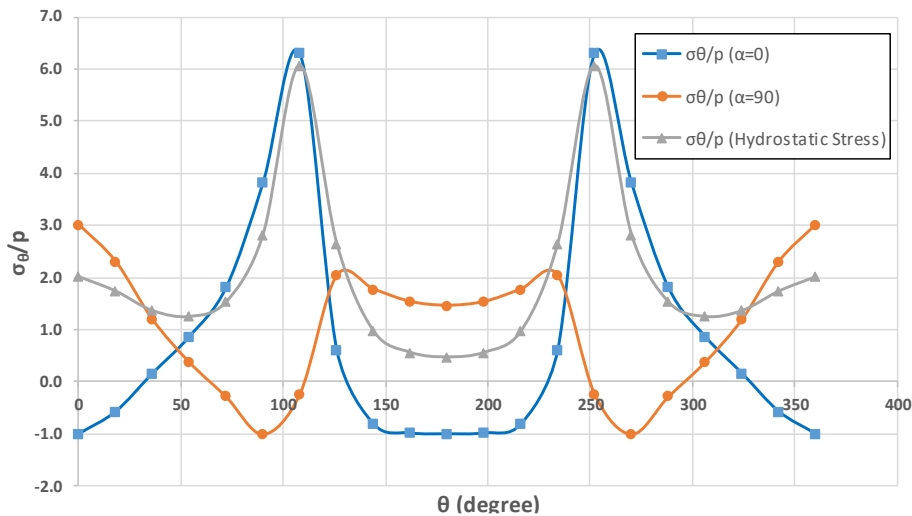
بدین ترتیب مانند آنچه تاکنون شرح داده شده است روابط (۲۸) و (۲۹) حاصل می‌شوند.

دستگاه معادلات مربوطه ضرایب β_0 ، β_1 و β_2 معین می‌گردد. با جایگذاری این ضرایب و مقادیر a_0 و a_1 در رابطه $\psi_0(\zeta)$ معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\psi_0(\zeta) = \frac{p}{2} \left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} 4.961 \\ +15.958\cos 2\alpha \\ +i15.958\sin 2\alpha \end{array} \right) \zeta^3 \\ - \left(\begin{array}{l} 117.133 \\ +31.795\cos 2\alpha \\ +i31.795\sin 2\alpha \end{array} \right) \zeta^2 \\ + 9.922\zeta \\ + 102.273\cos 2\alpha \\ + i102.273\sin 2\alpha \\ 10.113\zeta^3 + 3.144\zeta \\ - 3.156 \end{array} \right] + \frac{1.578e^{-2i\alpha}}{\zeta^2} - \frac{3.144e^{-2i\alpha}}{\zeta} \quad (23)$$

حال $\psi_0(\zeta)$ و $\varphi_0(\zeta)$ در معادله ۱۵ قرار داده می‌شود. پس از ساده‌سازی رابطه (۲۴) برقرار است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\zeta) = \left[\begin{array}{l} 0.245 \\ +0.789\cos 2\alpha \\ -i0.789\sin 2\alpha \\ +2.528\zeta \\ 0.786 \\ +5.056\cos 2\alpha \\ +i5.056\sin 2\alpha \end{array} \right] \zeta^{-1} \\ \psi(\zeta) = \left[\begin{array}{l} 5.056e^{-2i\alpha}\zeta \\ - \left(\begin{array}{l} 4.961 \\ +15.958\cos 2\alpha \\ +i15.958\sin 2\alpha \end{array} \right) \zeta^3 \\ + \left(\begin{array}{l} 117.133 \\ +31.795\cos 2\alpha \\ +i31.795\sin 2\alpha \end{array} \right) \zeta^2 \\ - 9.922\zeta \\ - 102.273\cos 2\alpha \\ - i102.273\sin 2\alpha \end{array} \right] \\ + \frac{2(10.113\zeta^3 + 3.144\zeta - 3.156)}{\zeta^2} \end{array} \right. = p \quad (24)$$



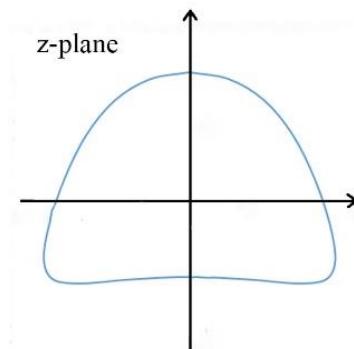
شکل ۳- نمودار تنش مماسی تک محوره افقی، قائم و هیدرواستاتیک تحت نگاهت سه جمله‌ای در تونل با مقطع نیم‌دایره

$$\sigma_{\theta} = 4Re \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right]$$

$$= p \left[\begin{array}{c} 141.704 + 0.044\cos 3\theta \\ +217.9\cos 2\theta - 32.452\cos \theta \\ 124.468 + 30.338\cos 4\theta \\ -63.834\cos 3\theta + 73.022\cos 2\theta \\ -29.312\cos \theta \end{array} \right] \quad (29)$$

که با استفاده از رابطه ۲۸ تنش تک محوره افقی و رابطه ۲۹ تنش تک محوره قائم براساس نگاهت همدیس چهار جمله‌ای حاصل می‌شوند.

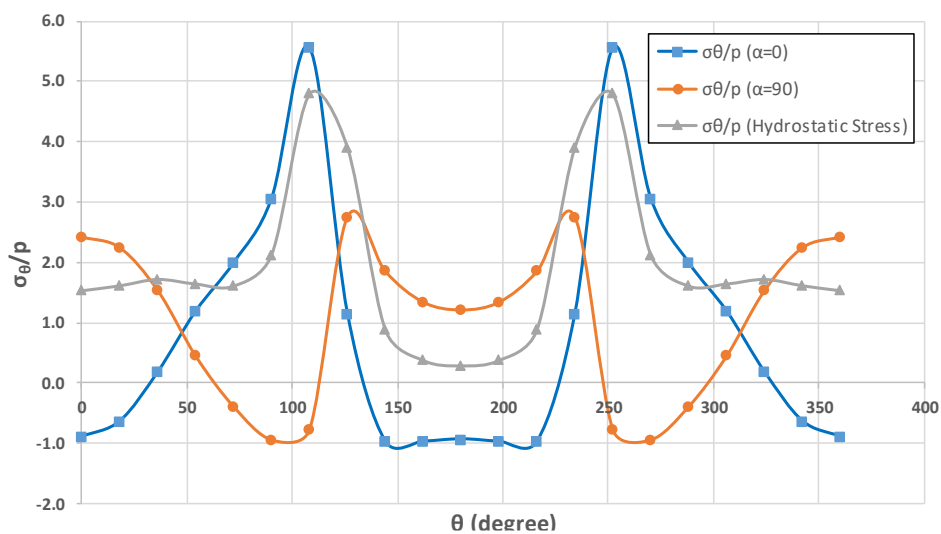
بر این اساس با جایگذاری مقادیر مختلف θ مطابق شکل ۵، تنش‌های مماسی در این حالت رسم می‌شوند. بر همین اساس رابطه نگاهت پنج جمله‌ای مطابق رابطه ۳۰ خواهد بود. با استفاده از رابطه ۳۱ تنش تک محوره افقی و رابطه ۳۲ تنش تک محوره قائم براساس نگاهت همدیس پنج جمله‌ای حاصل می‌شوند. نگاهت حاصل به صورت شکل ۶، است.



شکل ۴- مقطع نیم‌دایره با استفاده از نگاهت چهار جمله‌ای

$$\sigma_{\theta} = 4Re \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right]$$

$$= p \left[\begin{array}{c} 20.476 \\ +0.044\cos 3\theta \\ -229.896\cos 2\theta \\ +89.244\cos \theta \\ 124.468 \\ +30.338\cos 4\theta \\ -63.834\cos 3\theta \\ +73.022\cos 2\theta \\ -29.312\cos \theta \end{array} \right] \quad (28)$$



شکل ۵- نمودار تنش مماسی تک محوره افقی، قائم و هیدرواستاتیک تحت نگاهت چهار جمله‌ای در تونل با مقطع نیم‌دایره

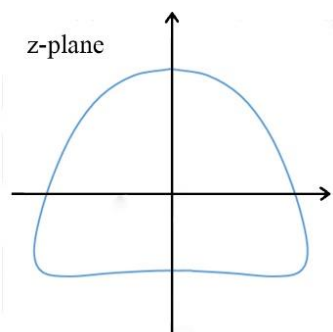
$$\sigma_{\theta} = 4Re \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right]$$

$$= p \begin{bmatrix} 141.52 \\ +1.1\cos 3\theta \\ +217.756\cos 2\theta \\ -32.516\cos \theta \\ 124.373 \\ +1.618\cos 5\theta \\ +30.338\cos 4\theta \\ -63.332\cos 3\theta \\ +72.518\cos 2\theta \\ -29.072\cos \theta \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$z = \omega(\zeta) = 10.113\zeta - 3.144\zeta^{-1} + 1.578\zeta^{-2} - 0.5\zeta^{-3} - 0.02\zeta^{-4} \quad (30)$$

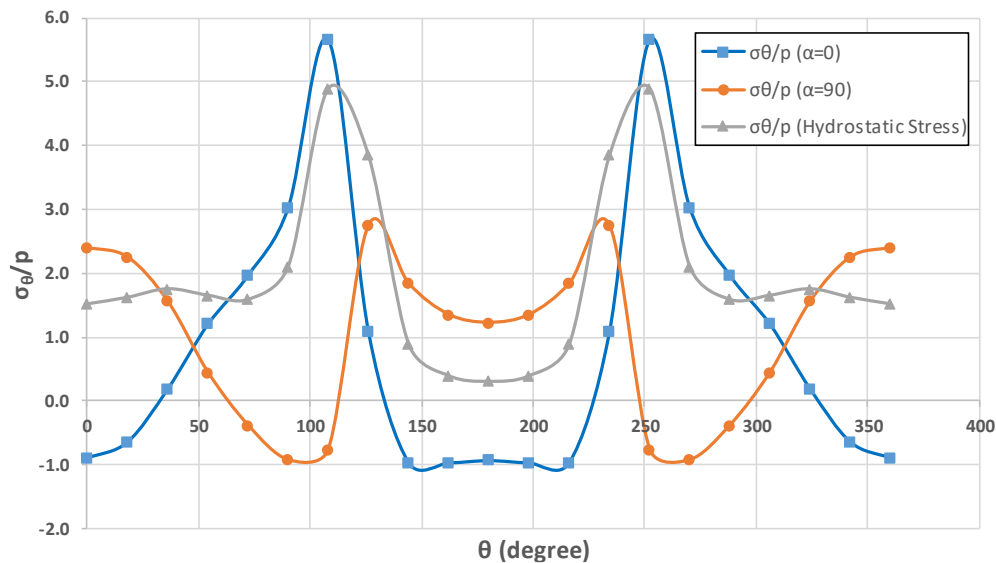
$$\sigma_{\theta} = 4Re \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right]$$

$$= p \begin{bmatrix} 20.768 \\ -1.972\cos 3\theta \\ -228.276\cos 2\theta \\ +88.7\cos \theta \\ 124.373 \\ +1.618\cos 5\theta \\ +30.338\cos 4\theta \\ -63.332\cos 3\theta \\ +72.518\cos 2\theta \\ -29.072\cos \theta \end{bmatrix} \quad (31)$$



شکل ۶-مقطع نیم‌دایره با استفاده از نگاهت پنج جمله‌ای

بر این اساس با جایگذاری مقادیر مختلف θ مطابق شکل ۷، تنش‌های مماسی در این حالت رسم می‌شود.



شکل ۷- نمودار تنش مماسی تک محوره افقی، قائم و هیدرواستاتیک تحت نگاهت پنج جمله‌ای در تونل با مقطع نیم‌دایره

وزن مخصوص ۲۶۵۰ کیلوگرم بر مترمکعب و مدول الاستیسیته ۶۷ گیگاپاسکال و ضریب پواسون ۰/۳۷ انتخاب شده است. در این مدل، مرزهای جانبی در جهت قائم و مرز پایین در دو جهت قائم و افقی بسته شده است ابتدا تنش‌های اولیه در مدل ایجاد شده و میزان نشست در کف مدل و میزان تنش‌ها در سطح مدل در زمان قبل از حفاری را به صفر می‌رسانیم. درواقع محیط مدل در طول زمان گذشته نشست خود را داشته و اکنون نشست ندارد. شرایط هندسی مدل به شرح زیر می‌باشد:

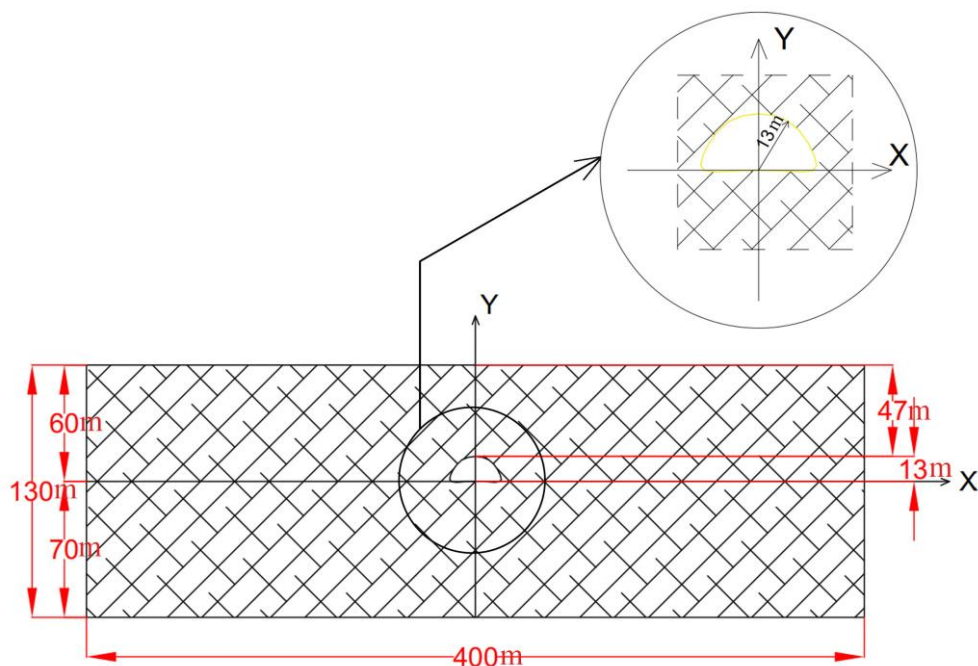
مرکز مختصات منطبق بر کف تونل است. ارتفاع محیط مدلسازی ۱۳۰ متر می‌باشد. از این مقدار ۶۰ متر در جهت مثبت دستگاه مختصات و ۷۰ متر در جهت منفی محور مختصات می‌باشد. همانطور که مشخص است مقدار روباره در محل سقف تونل با توجه به نیم‌دایره بودن مقطع با شعاع ۱۳ متر، برابر ۴۷ متر می‌باشد. به صورت شماتیک در شکل ۸، مشخص است.

نتایج تحلیل مطابق شکل ۹ و شکل ۱۰، حاصل شده است. با توجه به اینکه مدل در روش عددی برخلاف روش تحلیلی وابسته به ابعاد می‌باشد برای تونل این ابعاد فرض شده است.

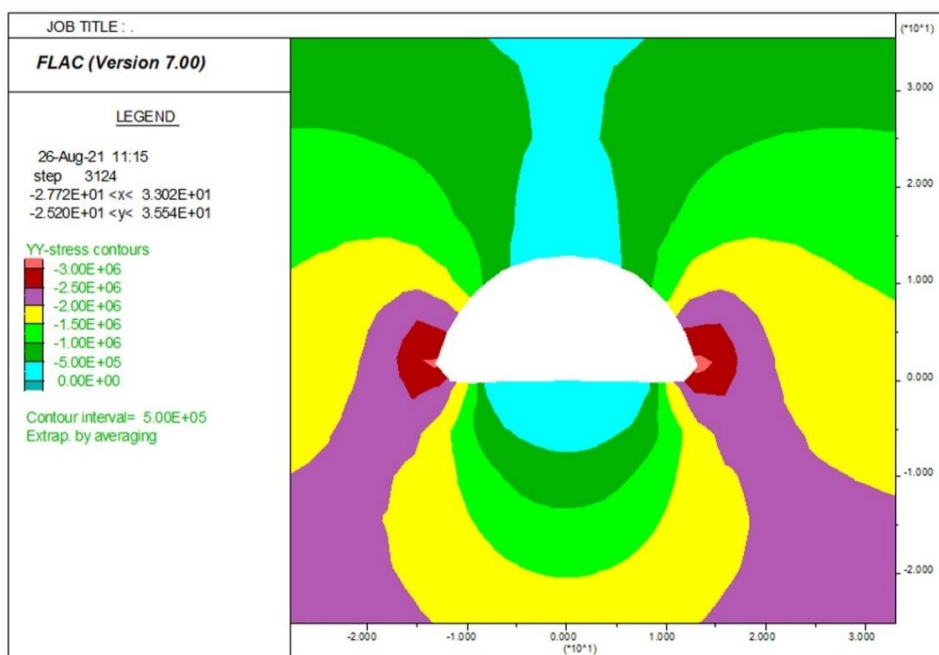
۵- مدل‌سازی عددی

مدلسازی عددی به وسیله نرم‌افزار *FLAC* انجام شده است. این نرم‌افزار با استفاده از روش تفاضل محدود به تحلیل مدل‌های مختلف در فضای دو بعدی می‌پردازد. نرم‌افزار *FLAC* تحت زبان برنامه نویسی *FISH* است و مدل‌سازی در آن به دو صورت گرافیکی و نوشتاری انجام می‌شود. روش کلی *FLAC* برای تحلیل شامل تقسیم‌بندی هندسه محیط به اجزای کوچکتر و با خصوصیات عددی یکسان و حل معادله دیفرانسیل مربوط به هر جزء تا رسیدن به تعادل نسبی است. بنابراین با استفاده از رابط گرافیکی و زبان برنامه‌نویسی نرم‌افزار مدل‌سازی انجام شده است و نرم‌افزار با استفاده از روش تفاضل محدود به تحلیل مدل پرداخته است.

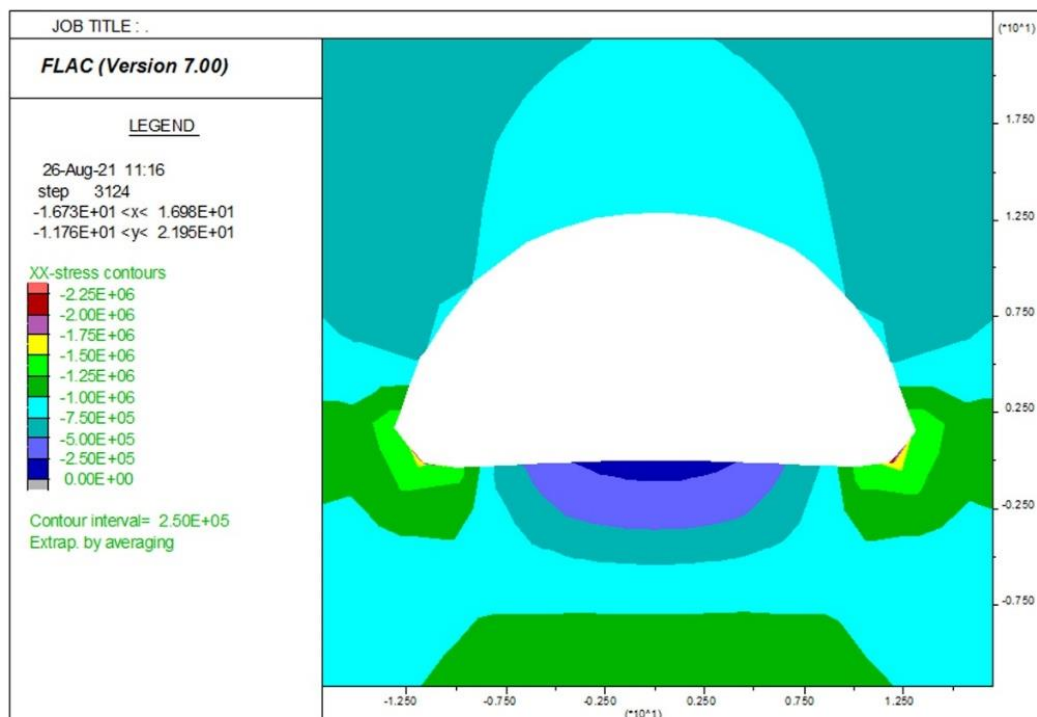
با استفاده از رابطه نگاهت همدیس ساوین برای تونل با مقطع نیم‌دایره به شعاع ۱۳ متر، مدل‌سازی تونل در نرم‌افزار *FLAC* انجام شد. مدل‌سازی عددی در دو مرحله انجام شده است. مرحله نخست مدل‌سازی محیط سنگی و مرحله دوم مدل‌سازی تونل در این محیط می‌باشد. با توجه به این که نیاز است تا خطوط کانتور تنش قائم در مدل به صورت کاملاً افقی باشد، طول مدل برابر ۴۰۰ متر و ارتفاع آن برابر ۱۳۰ متر انتخاب شده است. جنس سنگ آهگ با



شکل ۸- شرایط هندسی مدل سازی عددی



شکل ۹- کانتور تنش در جهت محور yها (کانتور تنش قائم در مدل سازی عددی)



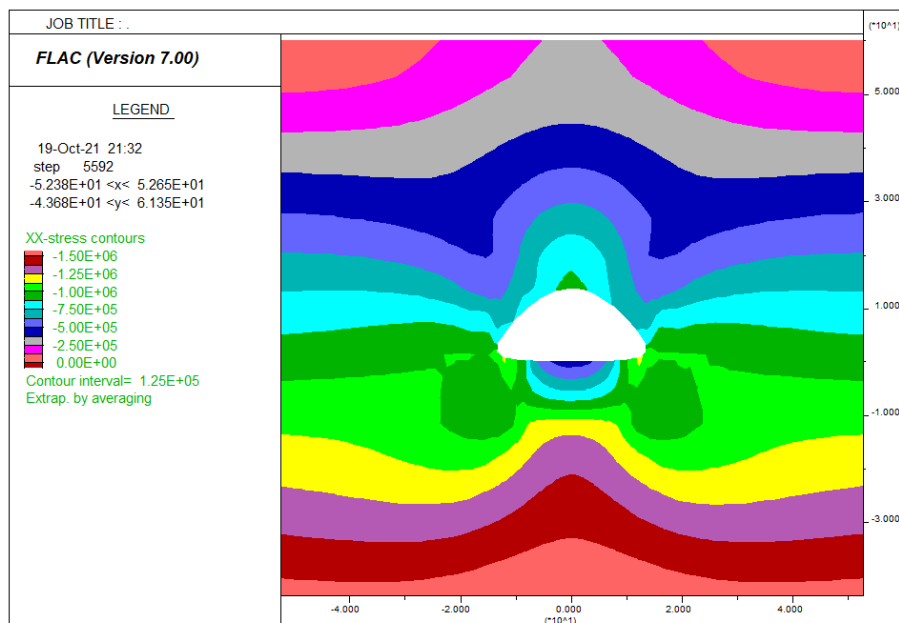
شکل ۱۰- کانتور تنش در جهت محور Xها

در زاویه ۱۲۶ درجه) می‌باشد. بنابراین با توجه به روند عمومی تنش در نگاشت چهار و پنج جمله‌ای و همچنین مدل‌سازی عددی مشخص است که در حالت نگاشت سه جمله‌ای چه در روش تحلیلی و چه در مدل‌سازی عددی پاسخ‌های نامتعارفی برای تنش‌های مماسی ارائه می‌شود بنابراین استفاده از سه جمله نگاشت دقت و کیفیت لازم را ندارد و تقریب مناسبی از مقطع نیم‌دایره را ارائه نمی‌کند. همچنین در حالت تنش هیدرواستاتیک در هر سه حالت نگاشت هم‌دیس بیشترین مقدار تنش در گوشه‌های تونل (۱۰۸ درجه) و حداقل مقادیر تنش نیز در کف تونل واقع است.

در مدل‌سازی عددی تونل با مقطع نیم‌دایره با استفاده از نگاشت هم‌دیس پنج جمله‌ای در نرم‌افزار *FLAC*، ماکزیمم تنش افقی و قائم در گوشه تونل و حداقل مقدار آن در سقف و کف تونل واقع است. با مقایسه دو کانتور تنش افقی و قائم، مقادیر تنش در جهت محور (ها) بحرانی‌تر می‌باشد.

پس از انجام محاسبات مشخص شد که روند تنش با $\alpha = 90$ در نگاشت سه جمله‌ای با نگاشت چهار و پنج جمله‌ای متفاوت است. بنابراین مدل‌سازی براساس شکل تونل با نگاشت سه جمله‌ای در نرم‌افزار *FLAC* انجام شد. مقادیر تنش حاصل از نگاشت سه جمله‌ای با مقادیر تنش حاصل از نگاشت پنج جمله‌ای تفاوت دارد و تنش در سقف تونل از دیواره‌ها بیشتر و مشابه با مقادیر تنش در گوشه می‌باشد. بنابراین مدل‌سازی نرم‌افزار نیز نتیجه مشابه با نتیجه روش تحلیلی داشت. شکل ۱۱، تنش قائم در این مدل‌سازی را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که در $\alpha = 0$ هر سه نگاشت نتایج مشابهی دارند.

با استفاده از نگاشت سه، چهار و پنج جمله‌ای، ماکزیمم تنش مماسی تک محوره افقی در گوشه‌های تونل (در زاویه ۱۰۸ درجه) و حداقل مقادیر آن در سقف و کف تونل می‌باشد. با استفاده از نگاشت سه جمله‌ای ماکزیمم تنش مماسی تک محوره قائم در سقف تونل (در زاویه صفر درجه) می‌باشد اما با استفاده از نگاشت چهار و پنج جمله‌ای ماکزیمم مقدار تنش مماسی تک محوره قائم در گوشه تونل



شکل ۱۱- کانطور تنش افقی براساس نگاهت سه جمله‌ای در مدل‌سازی عددی معادل تنش‌های قائم در روش تحلیلی

تنش‌های هیدرواستاتیک را بررسی نموده است. در شکل ۱۲ و ۱۳ می‌توان نتایج حاصل از پژوهش حاضر و پژوهش اکساداکتلیوس را مشاهده نمود.

بر اساس دو حالت تنش در پژوهش اکساداکتلیوس، نتایج مقایسه این پژوهش با روش اکساداکتلیوس به این شرح است که: در حالت اول مشخصاً روش تحلیلی و مدل‌سازی عددی در پژوهش اکساداکتلیوس با پژوهش حاضر دارای نتایج مشابه می‌باشند. در حالت دوم، نتایج حاصل از روش تحلیلی اکساداکتلیوس با پژوهش حاضر در گوشه تونل متفاوت و در بقیه محیط تونل مشابه می‌باشد. در حالت دوم، نتایج حاصل از مدل‌سازی عددی اکساداکتلیوس با مدل‌سازی عددی پژوهش حاضر متفاوت می‌باشد اما روند حرکتی داده‌ها مشابه است به این صورت که در گوشه‌های تونل مقادیر تنش ماکزیمم و در سقف تونل حداقل می‌باشد. با مقایسه نتایج حاصل از روش عددی و تحلیلی با یکدیگر مشخص است که هر دو روش تحلیلی و عددی نتایج مشابهی را ارائه می‌کنند. به طور مثال در هر دو روش تنش‌های ماکزیمم در گوشه‌های تونل واقع است و در کف و سقف تونل تنش حداقل مقدار را دارد و یا این‌که در تنش‌های افقی اختلاف مقادیر تنش در گوشه و سقف کمتر

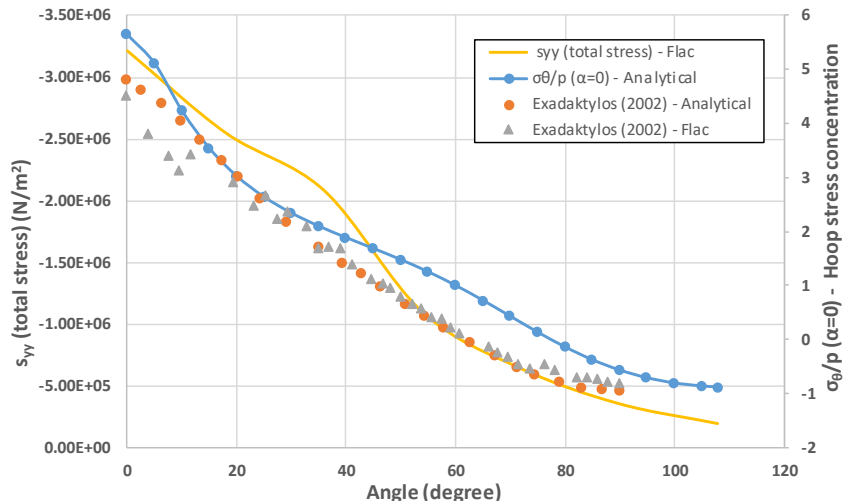
۶- مقایسه نتایج حاصل از روش تحلیلی با مدل‌سازی عددی و پژوهش اکساداکتلیوس، ۲۰۰۲

نوآوری‌های این پژوهش نسبت به پژوهش‌هایی همچون اکساداکتلیوس و استاوروپولو (۲۰۰۲) که مقطع تونل در آن مشابه پژوهش حاضر می‌باشد، شامل این موارد است که بر خلاف پژوهش او تنش در کل مرز تونل بررسی شده و شامل تنش‌های قائم، افقی و هیدرواستاتیک می‌باشد. در پژوهش حاضر در هر دو روش تحلیلی و عددی مقطع تونل به صورت نیم‌دایره می‌باشد. نگاهت همدیس مورد استفاده در پژوهش او برخلاف پژوهش حاضر تقارن هندسی ندارد و باعث پیچیدگی در محاسبات می‌گردد و همچنین در این پژوهش تفاوت دقت محاسبات براساس تعداد جملات نگاهت مشخص گردیده است.

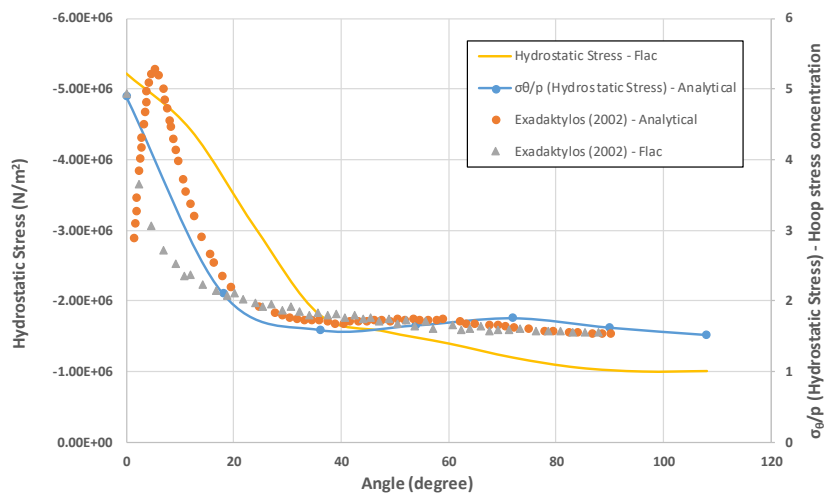
برای بررسی این دو روش و همچنین امکان مقایسه با پژوهش اکساداکتلیوس، ۲۰۰۲ از میان حالات متعدد بررسی شده در بخش‌های قبل دو حالت مشابه با پژوهش اکساداکتلیوس بررسی می‌شود. اکساداکتلیوس در پژوهش خود دو حالت تحت عنوان *CASE I* و *CASE II* بررسی کرده است. در حالت اول تنش‌های افقی و در حالت دوم

تونل‌ها اجتناب ناپذیر می‌باشد. بنابراین برای پایداری تونل و طراحی اجزای نگهدارنده تونل باید از وضعیت تنش‌های اطراف تونل آگاهی کامل داشت تا ایمنی لازم جهت طراحی برآورده شود. در نتیجه روش‌های تحلیلی و مدل‌سازی‌های عددی می‌توانند ابزاری سودمند در این مسیر باشند.

از تنش‌های قائم است. و همچنین تنش‌های قائم و مماسی مقادیر بحرانی‌تری دارند. اکساداکتلیوس در پژوهش خود به این نتیجه رسیده است که دو روش عددی و تحلیلی به‌جز در گوشه‌های تونل نتایج مشابه‌ای را پیش‌بینی می‌کنند و به طور موفقیت‌آمیزی مقادیر تنش را ارائه می‌کند. با توجه به توسعه راه‌های شهری و جاده‌ای استفاده از



شکل ۱۲- نمودار مقایسه پژوهش اکساداکتلیوس با پژوهش حاضر در حالت اول



شکل ۱۳- نمودار مقایسه پژوهش اکساداکتلیوس با پژوهش حاضر در حالت دوم

۷- نتیجه‌گیری

با توجه به پژوهش انجام گرفته نتایج زیر حاصل شده‌است:
۱- اگر چه بسیاری از مسائل طراحی تونل با استفاده از مدل‌های عددی بهتر از روش‌های تحلیلی حل می‌شوند اما از روش‌های تحلیلی برای حل اینگونه مسائل نباید چشم‌پوشی شود زیرا که روش‌های عددی با وجود توانایی بالا در حل مسائل پیچیده دارای معایبی همچون وابستگی به شرایط مرزی، وابستگی به ابعاد المان‌ها، نوع توابع تقریب، وجود گرادیان بالای تنش و ... هستند. در روش‌های تحلیلی به محاسبه دقیق پارامتری معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار محیط اطراف فضاهای زیرزمینی همچون تونل‌ها پرداخته می‌شود. در حالی که در روش‌های عددی به حل تقریبی و عددی این مسائل پرداخته می‌شود.

۲- با استفاده از نگاشت سه، چهار و پنج جمله‌ای، ماکزیمم تنش مماسی تک محوره افقی در گوشه‌های تونل (در زاویه ۱۰۸ درجه) و حداقل مقادیر آن در سقف و کف تونل می‌باشد. با استفاده از نگاشت سه جمله‌ای ماکزیمم تنش مماسی تک محوره قائم در سقف تونل (در زاویه صفر درجه) می‌باشد اما با استفاده از نگاشت چهار و پنج جمله‌ای ماکزیمم مقدار تنش مماسی تک محوره قائم در گوشه تونل (در زاویه ۱۲۶ درجه) می‌باشد. بنابراین با توجه به روند عمومی تنش در نگاشت چهار و پنج جمله‌ای و همچنین مدل‌سازی عددی مشخص است که در حالت نگاشت سه جمله‌ای چه در روش تحلیلی و چه در مدل‌سازی عددی پاسخ‌های نامتعارفی برای تنش‌های مماسی ارائه می‌شود بنابراین استفاده از سه جمله نگاشت دقت و کفایت لازم را ندارد و تقریب مناسبی از مقطع نیم‌دایره را ارائه نمی‌کند. همچنین در حالت تنش هیدرواستاتیک در هر سه حالت نگاشت هم‌مدیس بیشترین مقدار تنش در گوشه‌های تونل

(۱۰۸ درجه) و حداقل مقادیر تنش نیز در کف تونل واقع است.

۳- در مدل‌سازی عددی تونل با مقطع نیم‌دایره با استفاده از نگاشت هم‌مدیس پنج جمله‌ای در نرم‌افزار *FLAC*، ماکزیمم تنش افقی و قائم در گوشه تونل و حداقل مقدار آن در سقف و کف تونل واقع است. با مقایسه دو کانتور تنش افقی و قائم، مقادیر تنش در جهت محور (λ) ها بحرانی‌تر می‌باشد.

۴- بر اساس مقایسه‌های انجام گرفته، هر دو روش تحلیلی و عددی نتایج مشابهی را ارائه می‌کنند و به صورت موضعی در اطراف تونل در مقادیر تنش حاصل شده اختلافاتی وجود دارد. می‌توان گفت که مقادیر تنش حاصل شده بر اساس مبانی موجود در هر دو روش صحیح است و در طراحی تونل، مقادیر هر دو روش با در نظر گرفتن ضرایب اطمینان مناسب و تجربه مهندس قابل استفاده است.

۵- بر اساس دو حالت تنش در پژوهش اکساداکتلیوس، نتایج مقایسه این پژوهش با روش اکساداکتلیوس به این شرح است که: در حالت اول مشخصاً روش تحلیلی و مدل‌سازی عددی در پژوهش اکساداکتلیوس با پژوهش حاضر دارای نتایج مشابه می‌باشند. در حالت دوم، نتایج حاصل از روش تحلیلی اکساداکتلیوس با پژوهش حاضر در گوشه تونل متفاوت و در بقیه محیط تونل مشابه می‌باشد. در حالت دوم، نتایج حاصل از مدل‌سازی عددی اکساداکتلیوس با مدل‌سازی عددی پژوهش حاضر متفاوت می‌باشد اما روند حرکتی داده‌ها مشابه است به این صورت که در گوشه‌های تونل مقادیر تنش ماکزیمم و در سقف تونل حداقل می‌باشد.

۸- فهرست نمادها

در جدول ۱، سیاهه نمادها نشان داده شده است.

جدول ۱- سیاهه‌ی نمادها

نماد	واحد	شرح	نماد	واحد	شرح
z	-	صفحه مورد بررسی در دستگاه مختصات	f_0	-	تابع مرزی تنش
$w(\zeta)$	-	معادله نگاشت همدیس	σ_ρ	Pa	تنش شعاعی
R	بی‌بعد	پارامتر مقیاس نگاشت	σ_θ	Pa	تنش محیطی
ζ	-	صفحه مورد بررسی در دستگاه مختصات پس از استفاده از معادله نگاشت	$\tau_{\rho\theta}$	Pa	تنش برشی
$\varphi(\zeta)$	-	تابع تحلیلی	$\Phi(\zeta)$	-	$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$
$\psi(\zeta)$	-	تابع تحلیلی	$\overline{\Phi(\zeta)}$	-	مزدوج مختلط تابع $\Phi(\zeta)$
X	N	برآیند نیروهای خارجی در جهت x	i	-	یکه موهومی عدد مختلط
Y	N	برآیند نیروهای خارجی در جهت y	ρ	بی‌بعد	پارامتری است که به وسیله آن از مرز نگاشت فراتر رفته و نقاط محیط اطراف نگاشت حاصل می‌شود در مرز نگاشت $\rho = 1$
Γ	-	$\Gamma = B_1 + iC_1$	$\Psi(\zeta)$	-	$\Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$
B_1	-	$B_1 = \frac{N_1 + N_2}{4}$	α	°	زاویه تنش وارده به تونل با محور x
C_1	-	$C_1 = \frac{N_1 - N_2}{4}$	θ	°	معرف محل نقاط روی تونل
N_1 و N_2	Pa	مقدار تنش‌های اصلی در بی‌نهایت	p	Pa	تنش وارده به صفحه مورد نظر
$\varphi_0(\zeta)$	-	تابع تحلیلی ناشی از اضافه تنش	$U_0(x,y)$	-	تابع تنش
$\psi_0(\zeta)$	-	تابع تحلیلی ناشی از اضافه تنش			

۹- منابع

- Alami, M. (2013). Analytical Solution of The Stress Around Elliptical Tunnels in The Shear Field by The Method of Complex Potential Functions. Master's Thesis, Yasouj : Yasouj University.
- Amjadian, S. (2014). Analytical Solution of Stresses Around Rectangular Tunnels by The Method of Complex Potential Functions. Master's Thesis, Yasouj: Yasouj University.
- Batista, M. (2011). On The Stress Concentration Around A Hole in An Infinite Plate Subject to A Uniform Load at Infinity. International Journal Of Mechanical Science, Elsevier, 53(4), 254-261.
- Carranza-Tores, C., & Fairhurst, C. (1999). The Elastoplastic Response of Underground Excavations in Rock Masses That Satisfy The Hoekbrown Failure Criterion. Int J Rock Mech Min Geomech Abstr, 36, 777-809.
- England, A. H. (1971). On Stress Singularities in Linear Elasticity. International Journal Of Engineering Science, Elsevier, 9(6), 571-585.
- Exadaktylos, G. E., & Stavropoulou, M. C. (2002). A Closed-Form Elastic Solution for Stresses And Displacements Around Tunnels. International Journal of Rock Mechanics And Mining Sciences, Elsevier, 39(7), 905-916.
- Exadaktylos, G. E., Lioslios, P. A., & Stavropoulou, M. C. (2003). A Semi-Analytical Elastic Stress-

- Displacement Solution For Notched Circular Openings in Rocks. *International Journal Of Solids And Structures*, Elsevier, 40(5), 1165-1187.
- Fan, H., Wang, L., & Liu, W. (2020). An Analytical Solution for Stresses And Deformations of Tunnels in A Non-Uniform Stress Field Based On Strain-Softening Model And Mogi-Coulomb Criterion. *Latin American Journal Of Solids And Structures*, 17(1), E246.
- Gerçek, H. (1997). An Elastic Solution For Stresses Around Tunnels with Conventional Shapes. *International Journal of Rock Mechanics And Mining Sciences*, Elsevier, 34(3-4), 96 E1- 96 E14.
- Huo, H., Bobet, A., Fernandez, G. G., & Ramirez, J. A. (2006). Analytical Solution for Deep Rectangular Structures Subjected to Far-Field Shear Stresses. *Tunneling And Underground Space Technology Journal*, Elsevier,, 21(6), 613-625.
- Kargar, A., Rahman Nejad, R., & Haj Abbasi, M. A. (2013). Determining The Stress Field Around Gas Storage Caves Using Complex Potential Functions And Conformal Mapping. *Journal Of Tunnel And Underground Spaces Engineering*, 3(2), 133- 144.
- Kargar, A., Rahman Nejad, R., & Haj Abbasi, M. A. (2014). A Semi-Analytical Elastic Solution for Stress Field of Lined Non-Circular Tunnels at Great Depth Using Complex Variable Method. *International Journal of Solids And Structures*, Elsevier, 51(6), 1475-1482.
- Kolossov, G. V. (1909). *On An Application of Complex Function Theory to A Plane Problem of The Mathematical Theory of Elasticity*. Dorpat: Communication At The University Of Dorpat.
- Li, S. C., & Wang, M. B. (2008). Elastic Analysis of Stress-Displacement Field for A Lined Circular Tunnel at Great Depth Due to Ground Loads And Internal Pressure. *Tunneling And Underground Space Technology*, Elsevier, 23(6), 609-617.
- Li, Z., Wang, J., & Han, K. (2019). Analytical Solution of Ground Stress Induced By Shallow Tunneling With Arbitrary Distributed Loads on Ground Surface. *Symmetry*, 11(823).
- Muskhilishvili, N. I. (1954). *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*. Moscow: Springer Science, Business Media Dordrecht.
- Nazem, A., Hossaini, M. F., Rahami, H., & Bolghonabadi, R. (2015). Optimization of Conformal Mapping Functions Used in Developing Closed-Form Solutions for Underground Structures With Conventional Cross Sections. *International Journal of Mining And Geo-Engineering*, Tehran University, 49(1), 93-102.
- Savin, G. N. (1961). *Stress Concentration Around Holes*. Moscow: International Series of Monographs in Aeronautics And Astronautics, Pergamon Press.
- Stevenson, A. C. (1945). Complex Ootential in Two-Dimensoinal Elasticity. *Mathematical; Physical And Engineering Sciences*, *Proceedings of The Royal Society A*, 184(997), 79-129.
- Timoshenko, S., & Goodier, J. N. (1970). *Theory of Elasticity*. New York: Mcgraw – Hill.
- Wang, H. N., Zeng, G. S., Utili, S., Jiang, M. J., & Wu, L. (2017). Analytical Solutions of Stresses And Displacements for Deeply Buried Twin Tunnels in Viscoelastic Rock. *International Journal of Rock Mechanics And Mining Sciences*, Elsevier, 93, 13-29.

Zamani, M. (2012). The Analysis of Stress Around Tunnel in Shear Stress Domain. Elixir International Journal, 52a, 11696-11700.

Zamani, M. (2018). Analysis of Stress Around The Tunnel by Conformal Mapping. Journal of Civil And Environmental Engineering, 49(3), 45-52.

Zamani, M., Amjadian, S., & Khordad, R. (2014). Determining The Stress Around Square Tunnels Using Complex Potential Functions. Journal Of Tunnel Engineering And Underground Spaces, 4(2), 47-58.

Analysis of stress around semicircular tunnels by an analytical method (complex functions) and comparison with the results of numerical analysis

M. Zamani Lenjani^{1*}; S. M. S. Ale-Mohammad²; M. Rabeti Moghadam³

1- Assistant Professor; Faculty of Engineering, Civil Engineering Department, Yasouj University, mahdi@yu.ac.ir

2- MSc. in Geotechnical Engineering; Faculty of Engineering, Yasouj University, alemohammad.m.313@gmail.com

3- Assistant Professor; Faculty of Engineering, Civil Engineering Department, Yasouj University, rabeti@yu.ac.ir

Received: 30 Nov 2021; Accepted: 6 Apr 2022

DOI: 10.22044/TUSE.2022.11441.1440

Keywords

Semicircular tunnel
Stress analysis
Analytical method
Complex potential functions
Conformal mapping
Numerical analysis
Semicircular tunnel

Extended Abstract

Summary

In many areas, dug tunnels cannot be self-supporting, and barriers must be used to hold them in place. The most important factor in tunnel design is to ensure its stability. One of the most widely used sections in the construction of transportation tunnels is semicircular tunnels. To design such tunnels, we need to know the stresses around the tunnels. The location of the tunnel among the natural rock and soil materials causes that geological conditions

play a major role in its stability. Therefore, to ensure the stability of the tunnel, it is necessary to examine the state of stresses around the tunnel before and after its construction.

Introduction

In analytical methods, we come to equations that show the general trend of the effect of variables. Although many tunnel design problems are solved using numerical models better than analytical methods, but analytical methods to solve such problems should not be ignored. Numerical methods, despite their high ability to solve problems, possess some disadvantages such as their dependency on boundary conditions, the dimensions of the elements, and so on.

Methodology and Approaches

In this study, using complex potential functions and conformal mapping, the differential equation governing the behavior of rock mass in a semicircular tunnel under stresses is obtained. Tangential, radial and shear stresses at the tunnel boundary have been calculated in different modes. Finally, the analytical method is compared with numerical modeling done using FLAC software.

Results and Conclusions

Both analytical and numerical methods, used in this study, present similar results although there are differences in the values of stresses obtained locally around the tunnel. It can be said that the obtained values of stresses are correct based on the principles of both methods, and thus, in the tunnel design, the values of both methods can be used by

considering the appropriate safety factors and the experience of the engineer.
